北京大学教材

有限元方法讲义

应 隆 安

北京大学出版社

内 容 简 介

本书系统地介绍了有限元方法的基本原理和基本方法，包括椭圆型方程的协调、非协调、混合、杂交有限元方法，特征值问题，发展方程的有限元方法等。

本书层次清晰，取材精炼，简明易学，每章末都配有数量不多，但有一定深度的习题，可作为高等院校理工科高年级学生、研究生的教材或参考书，也可供从事于应用工作的有关科技人员参考。

北京大学教材

有限元方法讲义

应 隆 安

*

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

轻工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

787×1092毫米 32开本 5.5印张 130千字

1988年6月第一版 1988年6月第一次印刷

印数：00001—5200册

统一书号：ISBN 7-301-0009-X/O-004

定价：1.30元

序

从1983年开始，作者为北京大学数学系四年级学生和北京计算机学院计算机科学系四年级学生讲授了一门有限元方法入门课，名为"有限元方法引论"。选修本课程的还有校内外的研究生和进修教师。讲授时数为每周三学时，整个学期共计四十五至五十学时。到现在为止，已讲了四遍，每遍在材料的取舍与编排方面都有一些改动。本书是在原讲义的基础上经补充修改而成的。

有限元方法的内容十分丰富，作者试图将本书写成一本内容简明，难易适度的教材，主要供高等学校本科生学习之用。贯穿全书的是两条主要线索：第一，如何将一个偏微分方程的定解问题化为代数方程组或常微分方程组；第二，如何分析一个方法的收敛性。凡与这两条主线关系不大的材料都舍去了，如：与有限元方法有关的力学、物理知识，求解代数方程组的技巧，程序的编制与使用等等。就有限元方法理论而言，本书也仅是一本入门书，希望能为读者使用与深入学习有限元方法提供一个扎实的基础。对于在有限元方法的实践方面已经积累了丰富经验的读者，作者希望本书能对他们在理论上的提高有所帮助。

阅读本书，读者需具备大学理科教学大纲中规定的数学物理方程以及泛函分析的知识。考虑到有些知识，如Соболев空间的一些概念与术语，不一定在这两门课程中讲授过，本书安排了第一章，这一章简要地介绍了一些预备知识。就学习有限元方法的需要而言，读者只需记住结论，而

不必深究一些定理的证明.

第四章是本书最困难的一章. 有关的文献一般比较艰深, 因此作者在处理一些材料时, 并不追求数学上的严格性, 而只力图使内容通俗易懂一些. 即使这样, 在教学实践中, 教与学两方面都仍感到吃力. 读者如果只准备学习协调有限元方法, 这一章可略去不读.

作者在每章的后面都安排了一些习题, 在本书的最后给了部分习题的答案及提示. 有一些习题不很容易, 希望读者们在阅读的同时, 在习题上多化一些时间, 如不能完成全部, 只完成一部分也是有益的.

姜礼尚教授曾经阅读过作者的讲义, 提出了宝贵的意见. 此外, 在每次讲授过程中, 听众的反映都给作者以不少启发. 借此机会, 作者向以上同志表示衷心的感谢.

由于作者学识浅薄, 本书中错误在所难免, 选材方面也定有失当之处, 请读者批评指正.

应隆安

1986年1月于北京大学

目　录

引　　言

在讲正文以前，我们先考察一个例子，它极其简单，也不是有限元方法，但是也许能对我们理解有限元方法的基本思想有一些启示.

考虑二元一次代数方程

$$\begin{cases} k_{11}x+k_{12}y=f_1, \\ k_{21}x+k_{22}y=f_2. \end{cases} \tag{1}$$

它的解法很多，常用的一个是消元法. 以常数a乘第一式，常数b乘第二式，两式相加得

$$a(k_{11}x+k_{12}y)+b(k_{21}x+k_{22}y)=f_1a+f_2b. \tag{2}$$

适当取a和b，就可以使x的系数或y的系数等于零，先求出一个未知数，另一个未知数的求解就不难了.

现在，让我们改变一个观点看(2)式，提出如下问题：

问题G　求x,y，使(2)式对于任意的常数a,b都成立.

容易看出，问题G与方程组(1)是等价的，即(1)的解必为问题G的解，反之也对.

我们再换一个观点，假设有一个可微函数$F(x,y)$，它满足

$$\frac{\partial F}{\partial x}=k_{11}x+k_{12}y-f_1,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=k_{21}x+k_{22}y-f_2.$$

在(2)中分别将a,b记为dx,dy，则(2)式可以改写成

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0,$$

即
$$dF(x,y)=0,$$

亦即(x,y)是函数F的驻点.

问题R 求函数F的驻点(x,y).

显然，问题R与问题G又是等价的.

函数F不一定存在，如果F存在，则有

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x},$$

即
$$k_{12}=k_{21}, \tag{3}$$

即方程组(1)的系数矩阵是对称的.条件(3)又是充分条件，因为在此情况下

$$F(x,y)$$
$$=\frac{1}{2}k_{11}x^2+k_{12}xy+\frac{1}{2}k_{22}y^2-f_1x-f_2y.$$

用矩阵和向量的记号，令

$$K=\begin{pmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix},$$

$$F(\boldsymbol{u})=\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^TK\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{f},$$

其中上标T表示转置. 三种提法就是

原问题 求$\boldsymbol{u}$使$K\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}$；

问题G 求$\boldsymbol{u}$使$\boldsymbol{v}^TK\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{f}$，$\forall \boldsymbol{v}\in \boldsymbol{R}^2$；

问题R 求$\boldsymbol{u}$使$dF(\boldsymbol{u})=0$，

其中$\boldsymbol{R}^2$表示二维向量空间.

问题R使人想到极值问题，但是在一般情况下$\boldsymbol{u}$不是极值点. 当K是正定矩阵时，F是三维空间中的一个凸曲面，

问题R才是求F的最小值点.

以上考虑问题的思路与习惯的过程相反. 习惯的过程是将一个极值问题通过求微分化为方程组(1). 然而，将方程组(1)化为问题G或问题R正是变分方法的特色. 有限元方法就是一种变分方法.

以上三种提法有其物理背景，我们举下面的例子说明这一点.

考虑弹簧在外力作用下的平衡，在A, B点分别作用有外力f_1与f_2. 求这两点的位移x与y（图1）.

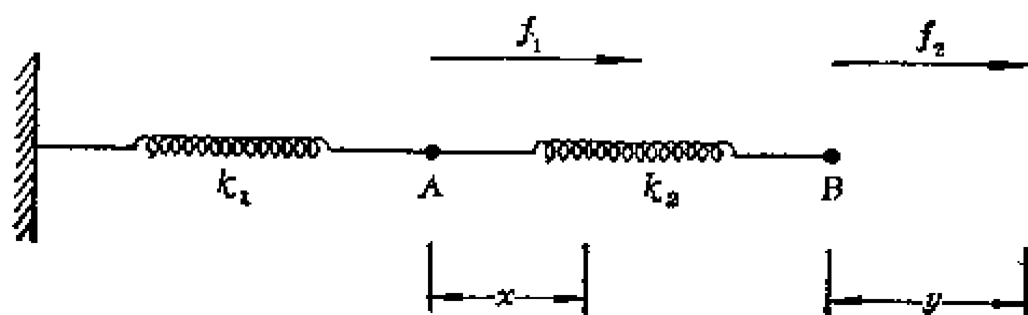


图 1

方法1 平衡方程

$$k_1x=f_1+f_2,$$
$$k_2(y-x)=f_2.$$

可以化为

$$(k_1+k_2)x-k_2y=f_1,$$
$$-k_2x+k_2y=f_2.$$

以上方程组的系数矩阵是对称正定的，求解可得x与y.

方法2 虚功原理. 设在A, B两点各有虚位移a, b, 则虚功为

$$W=-k_1xa-k_2(y-x)(b-a)+f_1a+f_2b=0.$$

即

$$a((k_1+k_2)x-k_2y)+bk_2(y-x)=f_1a+f_2b.\quad \forall a,b.$$

方法3 最小总势能原理．系统的总势能是

$$F=\frac{1}{2}k_1x^2+\frac{1}{2}k_2(y-x)^2-f_1x-f_2y.$$

令它的一阶微商$\partial F/\partial x$．$\partial F/\partial y$等于零，可以求解x与y。

以上三种方法恰与前面的三种提法对应．

我们已经考虑了具有两个自由度的系统．与偏微分方程对应的是无穷多个自由度的系统．为此，我们需要考虑相应的无穷维空间，即Соболев空间，以及无穷维空间上的微分．

第一章 预备知识

§1 Соболев空间初步

本书中的材料远不是Соболев空间理论的完整叙述，所有定理都不给证明，只是向读者介绍一些与学习有限元方法有关的必备知识．读者若要系统学习这部分知识，可参看参考书目．我们永远假定 Ω是 n 维空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中有界且连通的区域，边界是 $\partial\Omega$．空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中的点以 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 表示，当 $n=2$时，以 (x,y) 表示．设 m是一个非负整数，或者是∞，在Ω内m次连续可微的函数的集合记作 $C^m(\Omega)$；在闭区域$\bar{\Omega}$上m次连续可微的函数的集合记作$C^m(\bar{\Omega})$；$C^m(\Omega)$中所有在 Ω 内有紧支集的函数的集合记作 $C_0^m(\Omega)$．当 $m=0$时，可以不写m而简单地记作$C(\Omega),C(\bar{\Omega})$与$C_0(\Omega)$．函数$u$的偏微商可以写成

$$\partial^\alpha u=\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}},$$

其中$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 是一个行向量，它也称作多重指标，$\alpha_1\cdots,\alpha_n$是非负整数，记 $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$.

1.1 广义微商

定义 1 如果函数u在区域Ω上在 Lebesgue 意义下局部可积，而且有一个也在Ω上局部可积的函数v，使

$$\int_\Omega v\varphi dx=-\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx,\qquad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega),$$

其中x_i是某一自变量，$1\leqslant i\leqslant n$，则称v是u对自变量 x_i 的一

阶广义微商，记作$v=\partial u/\partial x_i$.

如果u是连续的，而且在古典意义下的微商$\partial u/\partial x_i$也是连续的，利用Green公式可以看出以上等式是成立的. 因此广义微商概念是古典微商概念的一个推广. 以上定义可以推广为任意阶广义微商.

定义 2 如果函数u在Ω上局部可积，而且有一个也在Ω上局部可积的函数v，使

$$\int_\Omega v\varphi dx=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u\partial^\alpha\varphi dx, \qquad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega),$$

则记$v=\partial^\alpha u$，称v是u的一个$|\alpha|$阶广义微商.

例 1 设区域Ω由一光滑曲面S分割为子区域Ω_1与Ω_2（图2），函数$u\in C(\Omega)$，在集合$\Omega\setminus S$上u的一阶古典微商连续且有界. 一般而言，在古典意义下u在Ω上是不可微的. 但是在Ω上广义微商$v=\partial u/\partial x_i$ $(i=1,\cdots,n)$ 存在. 在$\Omega\setminus S$上v等于古典微商$\partial u/\partial x_i$. 在S上v的值是无关紧要的，因为S是一个零测度的集合.

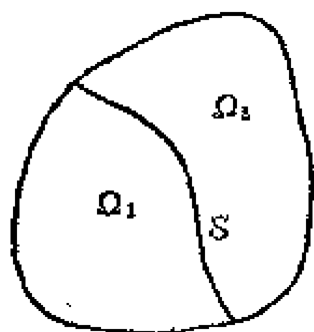


图 2

证明 对于任意的$\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，由Green公式得

$$\begin{aligned}\int_\Omega v\varphi dx&=\int_{\Omega_1}v\varphi dx+\int_{\Omega_2}v\varphi dx\\&=\int_{\Omega_1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi dx+\int_{\Omega_2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi dx\\&=-\int_{\Omega_1}u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx+\int_S u\varphi\cos\alpha_i ds\end{aligned}$$

$$-\int_{\Omega_2} u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx-\int_S u\varphi\cos\alpha_i ds,$$

其中α_i是Ω_1在S上的外法向量与x_i轴的夹角（对于Ω_2是内法向量），ds是$n-1$维曲面微分. 因此

$$\int_\Omega v\varphi dx=-\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx.$$

按定义，v就是广义微商$\partial u/\partial x_i$.

例 2 对于以上区域，设

$$u=\begin{cases}1, & x\in\Omega_1,\\ 2, & x\in\Omega_2,\end{cases}$$

则至少有一个一阶广义微商不存在.

证明 如果广义微商$v=\partial u/\partial x_i$ $(i=1,\cdots,n)$都存在，则在Ω_1与Ω_2上，v也是广义微商. 但是在Ω_1与Ω_2上u的古典微商等于零，因此v分别在Ω_1与Ω_2上等于零，即它几乎处处为零. 按定义 1

$$-\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx=\int_\Omega v\varphi dx=0.$$

由Green公式

$$-\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx=\int_S\varphi\cos\alpha_i ds.$$

但是对于$i=1,\cdots,n$，$\cos\alpha_i$不可能都等于零. 由φ的任意性，以上等式不可能恒成立. 于是导致一个矛盾. 因此u的一阶广义微商中，至少有一个不存在.

从例1,2可以看出，条件$u\in C(\Omega)$是本质的. 但是它不是必要条件，在本章习题中有一个反例.

1.2 Соболев空间

定义 3 设m为非负整数，$1\leqslant p\leqslant\infty$，作集合

$$W^{m,p}(\Omega)=\{u\in L^p(\Omega);\ \partial^\alpha u\in L^p(\Omega)(|\alpha|\leqslant m)\},$$

并且赋予范数

$$\|u\|_{m,p}=\Big(\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\|\partial^\alpha u\|_{0,p}^p\Big)^{1/p},\quad 1\leqslant p<\infty,$$

$$\|u\|_{m,\infty}=\max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\|\partial^\alpha u\|_{0,\infty},$$

其中$\|\cdot\|_{0,p}$表示空间$L^p(\Omega)$中的范数，则所得到的线性赋范空间$W^{m,p}(\Omega)$称为是一个Соболев空间.

容易证明，$W^{m,p}(\Omega)$是一个Banach空间. 显然，当$m=0$，$W^{0,p}(\Omega)=L^p(\Omega)$，因此$W^{m,p}(\Omega)$是$L^p(\Omega)$的一个推广. 当$p=2$，$W^{m,p}(\Omega)$又可以记作$H^m(\Omega)$，它是一个Hilbert空间. 如果需要特别地指出函数的定义域，我们将范数记作$\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$. 如果$p=2$，我们可以简单地将范数记作$\|\cdot\|_m$.

以下定理在Соболев空间理论中是基本的.

定理 1 如果区域Ω的边界$\partial\Omega$是Lipschitz连续的曲面，$1\leqslant p<\infty$，则$C^\infty(\bar\Omega)$在$W^{m,p}(\Omega)$中稠密.

换句话说，任给$u\in W^{m,p}(\Omega)$，存在序列$\{u_k\}\subset C^\infty(\bar\Omega)$，使当$k\to\infty$时

$$\|u-u_k\|_{m,p}\to 0,$$

对于上述区域，我们就可以给出Соболев空间的一个等价的定义：

定义 4 空间$C^\infty(\bar\Omega)$在范数$\|\cdot\|_{m,p}$下的完备化空间称为Соболев空间$W^{m,p}(\Omega)$.

按照同样思路，我们对于任意区域作如下的定义：

定义 5 空间$C_0^\infty(\Omega)$在范数$\|\cdot\|_{m,p}$下在空间$W^{m,p}(\Omega)$内的闭包称为Соболев空间$W_0^{m,p}(\Omega)$.

容易证明，$W_0^{m,p}(\Omega)$也是一个Banach空间．当$p=2$，可以记作$H_0^m(\Omega)$．它是一个Hilbert空间．$W_0^{m,p}(\Omega)$内的函数一般不再在Ω内有紧支集，在边界上它的性质将由迹定理所刻划．

在$W^{m,p}(\Omega)$中还可以引进半范数

$$|u|_{m,p}=\left(\sum_{|\alpha|=m}\|\partial^\alpha u\|_{0,p}^p\right)^{1/p},\quad 1\leqslant p<\infty,$$

$$|u|_{m,\infty}=\max_{|\alpha|=m}\|\partial^\alpha u\|_{0,\infty}$$

显然，只要$m>0$，以上半范数就不是范数．

1.3 嵌入定理

我们首先考虑一元函数的情形．

例 3　设(a,b)为$\boldsymbol{R}$中的有界区间，$u\in W^{1,p}(a,b)$，$1\leqslant p<\infty$．则存在一个与u几乎处处相等的函数，仍记作u，使$u\in C([a,b])$，而且存在与u无关的常数C，使

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|u(x)|\leqslant C\|u\|_{1,p}. \tag{1}$$

证明　首先设$u\in C^\infty([a,b])$，证明（1）式成立．由积分中值定理，存在某个$\sigma\in[a,b]$，使

$$\|u\|_{0,p}^p=\int_a^b|u(x)|^p dx=(b-a)|u(\sigma)|^p.$$

对任意的$x\in[a,b]$有

$$u(x)=u(\sigma)+\int_\sigma^x u'(t)dt,$$

当$p\neq 1$，由Hölder不等式

$$|u(x)|^p\leqslant 2^{p-1}\left(|u(\sigma)|^p+\left|\int_\sigma^x u'(t)dt\right|^p\right)$$

$$\leqslant 2^{p-1}\left(|u(\sigma)|^p + |x-\sigma|^{p-1}\left|\int_\sigma^x |u'(t)|^p dt\right|\right),$$

当$p=1$，以上不等式也成立，即有

$$|u(x)|^p$$

$$\leqslant 2^{p-1}\left\{\frac{1}{b-a}\|u\|_{0,p}^p + (b-a)^{p-1}\|u'\|_{0,p}^p\right\}.$$

令
$$C=\left(\max\left\{\frac{2^{p-1}}{b-a},\ 2^{p-1}(b-a)^{p-1}\right\}\right)^{1/p}$$

就有
$$|u(x)|\leqslant C\|u\|_{1,p}.$$

由x的任意性得(1)式．对于任意的$u\in W^{1,p}(a,b)$，取$\{u_k\}\subset C^\infty([a,b])$，使当$k\to\infty$时

$$\|u-u_k\|_{1,p}\to 0.$$

由(1)式

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|u_k(x)-u_l(x)|\leqslant C\|u_k-u_l\|_{1,p},\quad \forall k,l.$$

因此$\{u_k\}$在区间$[a,b]$上一致收敛，它的极限函数是连续的，与u几乎处处相等，且满足(1)式．证完．

我们知道，在$C([a,b])$中如引进范数

$$\|u\|=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|u(x)|,$$

则它是一个Banach空间．因此，由例3，恒同算子$Iu=u$是一个从$W^{1,p}(a,b)$到$C([a,b])$的连续算子，它称为嵌入算子．我们将以上嵌入关系记作

$$W^{1,p}(a,b)\to C([a,b]),$$

它不仅表示集合$W^{1,p}(a,b)$包含于集合$C([a,b])$之中（几乎处处相等的函数看作是同一个），而且还表示恒同算子I是连续的．

按嵌入算子的定义，以下的嵌入关系是明显的：

$$W^{m,p}(\Omega)\to W^{m,q}(\Omega),\quad p>q,$$

$$W^{m,p}(\Omega)\to W^{k,p}(\Omega),\quad m>k.$$

但是，下面的嵌入定理反映了Соболев空间的深刻性质：

定理 2 如果$\partial\Omega$是Lipschitz连续的曲面，$m\geqslant 1$，则

当$m<n/p$，$W^{m,p}(\Omega)\to L^q(\Omega)$，$1\leqslant q\leqslant\dfrac{np}{n-mp}$；

当$m=n/p$，$W^{m,p}(\Omega)\to L^q(\Omega)$，$1\leqslant q<\infty$；

当$m>n/p$，$W^{m,p}(\Omega)\to C(\bar\Omega)$.

推论 如果$\partial\Omega$是Lipschitz连续的曲面，$m\geqslant k+1$，则

当$m<k+n/p$，

$$W^{m,p}(\Omega)\to W^{k,q}(\Omega),\quad 1\leqslant q\leqslant\frac{np}{n-(m-k)p};$$

当$m=k+n/p$，$W^{m,p}(\Omega)\to W^{k,q}(\Omega)$，$1\leqslant q<\infty$；

当$m>k+n/p$，$W^{m,p}(\Omega)\to C^k(\bar\Omega)$.

定理 3 在定理2的假设条件下，下面的嵌入算子还是紧的：

当$m<n/p$，$W^{m,p}(\Omega)\to L^q(\Omega)$，$1\leqslant q<\dfrac{np}{n-mp}$；

当$m=n/p$，$W^{m,p}(\Omega)\to L^q(\Omega)$，$1\leqslant q<\infty$，

当$m>n/p$，$W^{m,p}(\Omega)\to C(\bar\Omega)$.

特别地，算子

$$I:H^1(\Omega)\to L^2(\Omega)$$

是连续的紧算子.

1.4 迹定理

因为Lipschitz连续的边界具有n维零测度，所以在通常意义下，当$u\in W^{m,p}(\Omega)$，讨论在边界$\partial\Omega$上u的值是没有意义的. 然而，按照嵌入定理，当$m>n/p$，$W^{m,p}(\Omega)$可以嵌入于$C(\bar{\Omega})$，这时可以很合理地将$u\in C(\bar{\Omega})$在边界上的值理解为$W^{m,p}(\Omega)$内的函数u在边界上的值. 当$m\leqslant n/p$，边界值的定义要复杂得多. 我们看一个例子.

例 4 设有正方形$\Omega=\{(x,y);0<x<1,\ 0<y<1\}$，$u\in C^{\infty}(\bar{\Omega})$，$p\geqslant 1$，则

$$\|u(\cdot,0)\|_{0,p,(0,1)}\leqslant C\|u\|_{1,p,\Omega}, \tag{2}$$

其中常数C与u无关.

证明 由例 3 的证明

$$|u(x,0)|^p\leqslant C\|u(x,\cdot)\|^p_{1,p,(0,1)},$$
$$\forall x\in(0,1).$$

因此

$$\int_0^1|u(x,0)|^p dx\leqslant C\int_0^1\|u(x,\cdot)\|^p_{1,p,(0,1)}dx$$

$$\leqslant C\|u\|^p_{1,p,\Omega}.$$

由此得(2)式. 证完.

由(2)式容易看出

$$\|u\|_{0,p,\partial\Omega}\leqslant C\|u\|_{1,p,\Omega}.$$

一般地，可以证明

定理 4 如果$m\geqslant 1$，$\partial\Omega$是m阶光滑的曲面，$u\in C^{\infty}(\bar{\Omega})$，则当$mp<n$时

$$\|u\|_{0,q,\partial\Omega}\leqslant C\|u\|_{m,p,\Omega},\quad 1\leqslant q\leqslant\frac{(n-1)p}{n-mp}; \tag{3}$$

当$mp=n$时

$$\|u\|_{0,q,\partial\Omega}\leqslant C\|u\|_{m,p,\Omega}\ ,\quad 1\leqslant q<\infty. \qquad (4)$$

因此，如果$u\in W^{m,p}(\Omega)$，由于$C^\infty(\bar\Omega)$在$W^{m,p}(\Omega)$中稠密，可以取$\{u_k\}\subset C^\infty(\bar\Omega)$，使当$k\to\infty$时

$$\|u-u_k\|_{m,p,\Omega}\to 0.$$

由不等式(3)，(4)，$\{u_k\}$在$L^q(\partial\Omega)$中收敛，记极限为$u|_{\partial\Omega}$. 它与$\{u_k\}$的取法无关.

定义 6　$u|_{\partial\Omega}$称为函数u在$\partial\Omega$上的迹，算子$\gamma: u\to u|_{\partial\Omega}$称为迹算子.

当$u\in W^{m,p}(\Omega)$，用$\{u_k\}\subset C^\infty(\bar\Omega)$逼近$u$，在不等式(3)，(4)中取极限，可以看出它们对于u也是成立的. 因此有迹定理：

定理 5　如果$m\geqslant 1$，$\partial\Omega$是m阶光滑的曲面，则当$mp<n$，迹算子

$$\gamma: W^{m,p}(\Omega)\to L^q(\partial\Omega),\quad 1\leqslant q\leqslant\frac{(n-1)p}{n-mp},$$

是连续的；当$mp=n$，迹算子

$$\gamma: W^{m,p}(\Omega)\to L^q(\partial\Omega),\qquad 1\leqslant q<\infty,$$

是连续的.

通常称空间$W^{m,p}(\Omega)$嵌入于$L^q(\partial\Omega)$，记作

$$W^{m,p}(\Omega)\to L^q(\partial\Omega).$$

它不仅表示$W^{m,p}(\Omega)$中的函数的迹属于$L^q(\partial\Omega)$，而且表示迹算子是连续的.

特别地，我们有

$$H^1(\Omega)\to L^2(\partial\Omega).$$

对于这个嵌入关系，区域还可以更一般一些，只要$\partial\Omega$是Lipschitz连续的曲面就够了.

按定义，如果$u\in H_0^1(\Omega)$，则$u|_{\partial\Omega}=0$. 还可以证明反过

来也对，即如果$u\in H^1(\Omega)$，且$u|_{\partial\Omega}=0$，则$u\in H_0^1(\Omega)$．这样，空间$H_0^1(\Omega)$已经有了一个非常清楚的刻划．

§2 变分·极值与Lagrange乘子

以下的一些概念是古典的微分与极值等概念在Banach空间中的推广．

设X，Y为Banach空间，$F:X\to Y$是定义于X的某一开集上的映射，它一般是非线性的．设$x\in X$是定义域内一点，则可以引进在x点的微商的概念．

定义7 如果存在线性算子$A:X\to Y$，使对任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使当$\|z\|<\delta$时

$$\|F(x+z)-F(x)-Az\|\leqslant\varepsilon\|z\|,$$

则称F在x点有Fréchet微商A，记作$A=F'(x)$．$F'(x)z$称为Fréchet微分，它也称为F在x点的一阶变分．

下面的公式对于计算Fréchet微分常常是很方便的．引进一个参数$t\in\boldsymbol{R}$，暂时固定$z\in X$，则$F(x+tz)$是一个从$\boldsymbol{R}$到Y的映射．由微分运算的链式法则可以导出公式：

$$\frac{d}{dt}F(x+tz)\Big|_{t=0}=F'(x)z. \tag{5}$$

设F是泛函，$F:X\to\boldsymbol{R}$．如果F在x点取到它的局部极值（极小或极大），而且在x点可微，则$F(x+tz)$作为t的函数在$t=0$取到局部极值．由(5)式得

$$F'(x)z=0,\qquad\forall z\in X, \tag{6}$$

即$F'(x)=0$．使(6)式成立的点称为驻点．因此，只要F可微，极值点必为驻点，反过来则不一定成立．

设$f:X\to Y$是一个将X映射到Y上的有界线性算子，即值域为Y．又设$y_0\in Y$，令

$$S=\{x\in X;\ f(x)=y_0\}.$$

当$y_0=0$，由f的连续性，S是X的闭子空间，记作S_0. 对于任意的$y_0\in Y$，我们可以取一个元素$x_0\in X$，使$f(x_0)=y_0$，则

$$S=x_0+S_0.$$

设$F:X\to\mathbf{R}$是一个可微的映射，限制在S上，F记作F_S. 如果F_S在$x\in S$点取到它的极值，则对于任意的$z\in S_0$与$t\in\mathbf{R}$，$x+tz\in S$，$F(x+tz)$作为t的函数在$t=0$取到局部极值. 因此有

$$F'(x)z=0,\qquad \forall z\in S_0. \tag{7}$$

将$F'(x)$看作是定义在S_0上的泛函，可以记作$F'_S(x)$，因此只要F_S在$x\in S$处取到它的极值，就有$F'_S(x)=0$.

类似于古典的Lagrange乘子的概念，可以引进 Lagrange泛函

$$\mathfrak{L}(x,\lambda)=F(x)+\lambda(f(x)-y_0),$$

其中$\lambda:Y\to\mathbf{R}$是任一有界线性泛函. 我们有以下的等价性定理：

定理 6 设F有有界的Fréchet微商，则$x\in S$，并且$F'_S(x)=0$的充分必要条件是：存在$\lambda\in Y'$，使

$$\mathfrak{L}'(x,\lambda)=0, \tag{8}$$

其中Y'是Y的对偶空间.

证明 先证明充分性. 由定义

$$\mathfrak{L}'(x,\lambda)(z,\mu)=F'(x)z+\lambda f(z)+\mu(f(x)-y_0),$$
$$\forall z\in X,\qquad \mu\in Y'.$$

因此如果(8)式成立，由μ的任意性得$f(x)=y_0$，即$x\in S$. 同时，当$z\in S_0$，$f(z)=0$，因此$f'(x)z=0$，即$F'_S(x)=0$.

再证明必要性. 如果$x\in S$，$F'_S(x)=0$. 任取$y\in Y$，

由于f的值域为Y，必存在$z\in X$，使$f(z)=y$. 令

$$\lambda(y)=-F'(x)z,$$

则λ是单值的，因为只要$z\in S_0$，就有$F'(x)z=0$. 因此以上已经定义了一个线性泛函λ. 由F'的有界性

$$|\lambda(y)|=|F'(x)z|=\inf_{w\in S_0}|F'(x)(z+w)|$$

$$\leqslant C\inf_{w\in S_0}\|z+w\|.$$

根据开映射定理，f所诱导的映射$f^*:X/S_0\to Y$有有界的逆算子. 因此

$$\inf_{w\in S_0}\|z+w\|\leqslant C\|y\|,$$

即有
$$|\lambda(y)|\leqslant C\|y\|$$

因此λ是一个有界线性泛函. 根据λ的定义立即得出

$$\mathfrak{L}'(x,\lambda)(z,\mu)=0,\qquad \forall z\in X,\ \mu\in Y'.$$

这就是我们所要证明的. 证完.

例5 $F(u)=\frac{1}{2}\int_0^1 u^2dx-\int_0^1 fudx$，其中$f\in L^2(0,1)$，

对于泛函$F:C([0,1])\to \mathbf{R}$，求极小值点. 这时

$$F(u+tv)=\frac{1}{2}\int_0^1 u^2dx+t\int_0^1 uvdx+\frac{t^2}{2}\int_0^1 v^2dx$$

$$-\int_0^1 fudx-t\int_0^1 fvdx.$$

因此

$$F'(u)v=\frac{d}{dt}F(u+tv)\Big|_{t=0}=\int_0^1 uvdx-\int_0^1 fvdx.$$

在极小值点$v\in C([0,1])$，一阶变分等于零，即

$$\int_0^1(u-f)vdx=0,\qquad \forall v\in C([0,1]).$$

由于$C([0,1])$在$L^2(0,1)$中稠密，上式当$v\in L^2(0,1)$时也成立。因此$u=f$。所以，只要$f\bar{\in}C([0,1])$，以上极值问题就没有解。但是如果考虑泛函$F:L^2(0,1)\to R$，这个极值问题就有唯一解。

例 6
$$F(u)=\frac{1}{2}\int_0^1(u')^2dx-\int_0^1 fudx,$$

其中$f\in L^2(0,1)$，设F的定义域为$H^1(0,1)$，并且加一个约束$u(1)=1$，这时

$$S=\{u\in H^1(0,1);\ u(1)=1\},$$
$$S_0=\{u\in H^1(0,1);\ u(1)=0\}.$$

可以求得

$$F'(u)v=\int_0^1 u'v'dx-\int_0^1 fvdx.$$

设F限制在S上在$u\in S$点取得极小值，就有

$$\int_0^1 u'v'dx-\int_0^1 fvdx=0,\quad \forall v\in S_0.$$

也可以引进Lagrange乘子$\lambda\in \boldsymbol{R}$，定义泛函

$$\mathcal{L}(u,\lambda)=\frac{1}{2}\int_0^1(u')^2\,dx-\int_0^1 fudx+\lambda(u(1)-1),$$

原问题等价于：求$u\in H^1(0,1)$，$\lambda\in \boldsymbol{R}$，使

$$\begin{cases} \int_0^1 u'v'dx - \int_0^1 fvdx + \lambda v(1) = 0, & \forall v \in H^1(0,1), \\ u(1) = 1. \end{cases}$$

§3 边值问题的弱解

3.1 Dirichlet问题

我们以Poisson方程的Dirichlet问题为例：

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega, \\ v = g, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{9}$$

其中$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. 设它的解 $u \in C^2(\bar{\Omega})$. 任取一个 $v \in C_0^\infty(\Omega)$，它称为试探函数，将v与方程相乘，然后在区域Ω上积分得

$$-\int_\Omega v\Delta u dx = \int_\Omega fvdx.$$

利用Green公式和v的边值得

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_\Omega fvdx.$$

以 $(\cdot,\cdot)$ 表示空间$L^2(\Omega)$中的内积，令

$$a(u,v) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx,$$

则可以写成

$$a(u,v) = (f,v). \tag{10}$$

(10) 式不仅对所有的 $v \in C_0^\infty(\Omega)$ 成立，且对所有的 $v \in H_0^1(\Omega)$ 也成立. 这是因为我们可以取$\{v_k\} \subset C_0^\infty(\Omega)$，使它按范数$\|\cdot\|_1$收敛于 v. v_k使(10)式成立，由Schwarz不等式得

$$\left|\int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial(v-v_k)}{\partial x_i} dx\right|$$

$$\leqslant \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx\right)^{1/2}$$

$$\times \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial(v-v_k)}{\partial x_i}\right)^2 dx\right)^{1/2}$$

$$\leqslant \|u\|_1 \|v-v_k\|_1 \to 0 \qquad (k\to\infty).$$

由内积的连续性

$$(f,v_k)\to(f,v) \qquad (k\to\infty),$$

因此可以在(10)式中取极限.

从(10)式可以引出弱解的定义.

定义 8 如果$u\in H^1(\Omega)$, $u|_{\partial\Omega}=g$, 并且满足

$$a(u,v)=(f,v), \qquad \forall v\in H_0^1(\Omega) \tag{11}$$

则称u为问题(9)的一个弱解.

为使以上定义有意义,我们要求$f\in L^2(\Omega)$,并且至少存在一个函数$u_0\in H^1(\Omega)$,使$u_0|_{\partial\Omega}=g$.因此,条件$u\in H^1(\Omega)$与$u|_{\partial\Omega}=g$等价于$u-u_0\in H_0^1(\Omega)$. 限于篇幅,我们不对这样的函数g作进一步刻划.

关于弱解与古典解的关系,我们有如下定理.

定理 7 设$f\in C(\bar\Omega)$, $g\in C(\partial\Omega)$. 如果$u\in C^2(\bar\Omega)$是问题(9)的古典解,则它是弱解;反之,如果u是问题(9)的弱解,并且$u\in C^2(\bar\Omega)$,则它是古典解.

证明 定理的前面一半是明显的. 现在设u是问题(9)的弱解,并且$u\in C^2(\bar\Omega)$. 在(11)式中取$v\in C_0^\infty(\Omega)$,利用Green公式得

$$\int_{\Omega}(\Delta u+f)v dx=0,$$

因此作为广义函数

$$\Delta u+f=0.$$

但是Δu与f都是连续函数，因此它们处处相等，即u为方程的古典解．由迹的定义不难看出u在$\partial\Omega$上等于g．证完

下面我们给出(11)的一个等价定义．作空间$H^1(\Omega)$上的二次泛函

$$J(v)=\frac{1}{2}a(v,v)-(f,v).$$

由一阶变分的定义容易看出

$$J'(u)v=a(u,v)-(f,v).$$

考虑子集合

$$S=\{v\in H^1(\Omega):\ v|_{\partial\Omega}=g\},$$

它就是$u_0+H_0^1(\Omega)$．于是问题(11)就是：求$u\in S$，使

$$J'(u)v=0,\qquad \forall S\in H_0^1(\Omega). \tag{12}$$

即u为驻点．我们还可以证明它是最小值点．

定理8 问题(12)等价于：求$u\in S$，使

$$J(u)=\min_{v\in S}J(v). \tag{13}$$

证明 我们已经在§2中证明了(13)式蕴含(12)式，因此只要证明(12)式蕴含(13)式就够了．如果u是问题(12)的解，对任意的$v\in S$，利用$a(\cdot,\cdot)$的对称性得

$$J(v)-J(u)$$

$$=\frac{1}{2}a(v,v)-(f,v)-\frac{1}{2}a(u,u)+(f,u)$$

$$=a(u,v-u)-(f,v-u)+\frac{1}{2}a(v-u,v-u).$$

已知$v-u\in H_0^1(\Omega)$，由(11)式

$$J(v)-J(u)=\frac{1}{2}a(v-u,v-u)\geqslant 0.$$

即u为(13)的解．证完．

推论（最小势能原理） 设$f\in C(\bar{\Omega})$，$g\in C(\partial\Omega)$．如果$u\in C^2(\bar{\Omega})$是问题(9)的古典解，则它是问题(13)的解；反之，如果u是问题(13)的解，并且$u\in C^2(\bar{\Omega})$，则它是问题(9)的古典解．

有时将边界条件"齐次化"是方便的．取$u_0\in H^1(\Omega)$，使$u_0|_{\partial\Omega}=g$，引进新的未知量$u'=u-u_0$，则问题(11)等价于：求$u'\in H_0^1(\Omega)$，使

$$a(u',v)=(f,v)-a(u_0,v),\qquad \forall v\in H_0^1(\Omega).$$

方程的右端是空间$H_0^1(\Omega)$上的有界线性泛函，记作$F(v)$．为了方便起见，我们将未知量仍记作u，即有：求$u\in H_0^1(\Omega)$，使

$$a(u,v)=F(v),\qquad \forall v\in H_0^1(\Omega). \tag{14}$$

与之相应地有

$$J(v)=\frac{1}{2}a(v,v)-F(v).$$

等价的问题是：求$u\in H_0^1(\Omega)$，使

$$J(u)=\min_{v\in H_0^1(\Omega)} J(v). \tag{15}$$

问题(11)—(15)都可以称为变分问题．

为了证明问题(14)的解的存在唯一性，我们需要如下的抽象定理．

定理 9（Lax-Milgram） 设V是一个Hilbert空间，$a(u,v)$是V上的有界双线性泛函，$F(v)$是V上的有界线性泛函．如果存在常数$\alpha>0$，使

$$a(u,u)\geqslant\alpha\|u\|^2,\qquad \forall u\in V,\tag{16}$$

则存在唯一的$u\in V$，满足方程

$$a(u,v)=F(v),\qquad \forall v\in V,$$

并且

$$\|u\|\leqslant\frac{1}{\alpha}\|F\|,$$

其中$\|F\|$是泛函F的范数．

证明 以$(\cdot,\cdot)_V$表示空间V上的内积．由Riesz 表示定理，存在$w\in V$，对所有的$v\in V$，

$$F(v)=(w,v)_V,$$

并且$\|w\|=\|F\|$．因此我们只需要讨论方程

$$a(u,v)=(w,v)_V,\qquad \forall v\in V$$

令 $D=\{u^*\in V$；存在$u\in V$，使$a(u,v)=(u^*,v)_V,\ \forall v\in V\}$，则$D$是非空的，因为$0\in D$，这时可以取$u=0$．同时，$u$由$u^*$唯一确定，因为如果对某个$u^*\in D$，有$u_1$与$u_2$两个元素与它对应，则有

$$a(u_1-u_2,v)=0,\qquad \forall v\in V.$$

取$v=u_1-u_2$得

$$\alpha\|u_1-u_2\|^2\leqslant a(u_1-u_2,u_1-u_2)=0,$$

因此$u_1=u_2$．根据$(u,v)_V$和$a(u,v)$的双线性性质，我们得到一个定义域为D的线性算子S，使$Su^*=u$．又因为

$$\alpha\|Su^*\|^2\leqslant a(Su^*,Su^*)=(u^*,Su^*)_V$$
$$\leqslant\|u^*\|\cdot\|Su^*\|,$$

所以
$$\|Su^*\|\leqslant\frac{1}{\alpha}\|u^*\|.$$

为证明本定理，只要证明D是全空间V，首先，D是V的一个闭线性子空间，因为如果$\{u_k^*\}\subset D$是一个Cauchy序列，由S的连续性，$\{Su_k^*\}$也是一个Cauchy序列，从而有极限。设$\{u_k^*\}$与$\{Su_k^*\}$的极限分别为u^*与u，取极限得
$$a(u,v)=(u^*,v)_V,\qquad \forall v\in V,$$
即$u^*\in D$.

其次，$D=V$。设不然，则存在非零元素$u_0\in V$，使u_0与D中所有的元素都正交。对于这个给定的u_0，$a(u_0,v)$是V上的一个有界线性泛函。由Riesz表示定理，存在$u_0^*\in V$，使
$$a(u_0,v)=(u_0^*,v)_V,\qquad \forall v\in V,$$
从而$u_0^*\in D$，而且$Su_0^*=u_0$。但是由
$$\alpha\|u_0\|^2\leqslant a(u_0,u_0)=(u_0^*,u_0)_V=0$$
得$u_0=0$。这是一个矛盾。证完.

条件(16)常称为强制条件，对于问题(14)，为了利用Lax-Milgram定理证明解的存在唯一性，还需验证条件(16)，而定理中的其它条件是明显成立的.

为此，我们还需要证明一个不等式，它称为Poincaré-Friedrichs不等式.

定理10 存在只依赖于区域Ω的常数C，使
$$\|u\|_0\leqslant C|u|_1,\qquad \forall u\in H_0^1(\Omega).\tag{17}$$

证明 不失一般性，我们总可以认为Ω上所有的点x都满足$0<x_n<d$，否则可以平移坐标系来做到这一点。首先假定$u\in C_0^\infty(\Omega)$，这时

$$u(x)=\int_0^{x_n}\frac{\partial}{\partial t}u(x_1,\cdots,x_{n-1},t)dt.$$

由Schwarz不等式得

$$\int_0^d |u(x)|^2 dx_n$$

$$=\int_0^d \left(\int_0^{x_n}\frac{\partial}{\partial t}u(x_1,\cdots,x_{n-1},t)dt\right)^2 dx_n$$

$$\leqslant\int_0^d x_n\int_0^d\left(\frac{\partial}{\partial t}u(x_1,\cdots,x_{n-1},t)\right)^2 dt dx_n$$

$$=\frac{d^2}{2}\int_0^d\left(\frac{\partial}{\partial t}u(x_1,\cdots,x_{n-1},t)\right)^2 dt,$$

因此

$$\|u\|_0^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}dx_1\cdots dx_{n-1}\int_0^d|u(x)|^2dx_n\leqslant\frac{d^2}{2}|u|_1^2.$$

即有$C=d/\sqrt{2}$. 对于一般的$u\in H_0^1(\Omega)$, 可以利用$C_0^\infty(\Omega)$在$H_0^1(\Omega)$内的稠密性, 取极限即得, 证完.

推论 存在只依赖于区域Ω的常数$\alpha>0$, 使

$$|u|_1^2\geqslant\alpha\|u\|_1^2,\qquad\forall u\in H_0^1(\Omega).\tag{18}$$

由(18)式和Lax-Milgram定理, 问题(14)的解是存在唯一的.

3.2 Neumann问题

我们考虑Poisson方程的Neumann问题

$$\begin{cases}-\Delta u=f, & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu}=g, & x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{19}$$

其中ν表示外法向. 设问题(19)的解$u\in C^2(\bar{\Omega})$. 任取一个

试探函数$v\in C^\infty(\bar{\Omega})$，类似于(10)式可以导出

$$a(u,v)=\int_\Omega fv\,dx+\int_{\partial\Omega} gv\,ds, \tag{20}$$

并且（20）式对所有的$v\in H^1(\Omega)$也成立．设$f\in L^2(\Omega)$，$g\in L^2(\partial\Omega)$，类似于定义8，可以给出弱解的定义．

定义9　如果$u\in H^1(\Omega)$，并且

$$a(u,v)=\int_\Omega fv\,dx+\int_{\partial\Omega} gv\,ds,\qquad \forall v\in H^1(\Omega) \tag{21}$$

则称u为问题（19）的一个弱解．

关于弱解与古典解的关系，我们有如下的定理：

定理11　设$f\in C(\bar{\Omega})$，$g\in C(\partial\Omega)$．如果$u\in C^2(\bar{\Omega})$是问题(19)的古典解，则它是弱解；反之，如果u是问题(19)的弱解，并且$u\in C^2(\bar{\Omega})$，则它是古典解．

证明　我们只需要证明定理的后面一半，设u是问题(19)的弱解，并且$u\in C^2(\bar{\Omega})$，在(21)式中取$v\in C_0^\infty(\Omega)$，利用Green公式得

$$\int_\Omega(\Delta u+f)v\,dx=0,$$

因此u是方程的古典解．再取$v\in C^\infty(\bar{\Omega})$，将Green公式用于(21)式，并且利用$u$满足方程得

$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\nu}v\,ds=\int_{\partial\Omega} gv\,ds.$$

再利用v的任意性便得u满足边界条件．证完．

象古典解一样，问题(19)的弱解不一定存在．因为可以在(21)式中取$v=1$，得

$$\int_{\Omega} f dx + \int_{\partial\Omega} g ds = 0 . \tag{22}$$

(22) 式是解存在的必要条件，此外，如果u是弱解，则对于任意常数C，容易验证$u+C$也是弱解，于是，如果弱解存在，则不唯一．

为保证唯一性，令

$$V = \left\{ u \in H^1(\Omega);\ \int_{\Omega} u dx = 0 \right\},$$

并且要求$u \in V$，这样就将任意常数确定下来了．现在，设f，g满足条件(22)，我们给出(19)的弱解的一个新的提法．

定义10 如果$u \in V$，并且

$$a(u,v) = \int_{\Omega} fv dx + \int_{\partial\Omega} gv ds, \quad \forall v \in V, \tag{23}$$

则称u为问题(19)的一个弱解，

需要说明的是，方程(21)与(23)是等价的，因为如果(23)成立，任取$v \in H^1(\Omega)$，则总可以作分解$v = v_0 + C$，其中C是一个常数，$v_0 \in V$，由条件(22)，(21)也是成立的．注意到这一点，只要$f \in C(\overline{\Omega})$，$g \in C(\partial\Omega)$，$u$是定义10意义下的弱解，$u \in C^2(\overline{\Omega})$，则由定理11，$u$是问题(19)的古典解．

可以用Lax-Milgram定理证明由定义10确定的弱解的存在唯一性．我们将在第五章给出证明．

3.3 几点附注

附注 1 变分问题(14)与变分问题(23)的一个区别是：对于(14)，边界条件体现在空间$V = H_0^1(\Omega)$中，对于(23)，边界条件自然地包含在(23)式内而不必对V作限制．我们称前者为强制边界条件，称后者为自然边界条件．

附注 2 对于弱解，如果方程的系数、右端项、边界条件、以及区域的边界的正则性高一些，解的正则性也会高一些．例如问题(9)，当$f=0$，任意的弱解u都是解析函数．又如当$g=0$，$f\in H^{m-2}(\Omega)(m\geqslant 2)$，$\partial\Omega$是$m$阶光滑的曲面，则任意的弱解$u\in H^{m}(\Omega)$，而且

$$\|u\|_m\leqslant C\|f\|_{m-2}, \tag{24}$$

其中常数C与f无关．

附注 3 如果$\partial\Omega$不光滑，但是满足 Lipschitz 条件，且Ω是凸的．对问题(9)，当$g=0$，$f\in L^2(\Omega)$，则$u\in H^2(\Omega)$，而且不等式(24)成立（$m=2$）．

附注 4 对于更为一般的方程与边界条件，不难给出弱解的定义．例如问题

$$\begin{cases}-\sum\limits_{i,j=1}^{n}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\sum\limits_{i=1}^{n}b_i(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u\\ \quad =f(x), \qquad x\in\Omega,\\ u=0, \qquad x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

只要令

$$\begin{aligned}&a(u,v)\\ &\quad=\int_\Omega\Big\{\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\\ &\qquad+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}v+c(x)uv\Big\}dx,\end{aligned}$$

弱解的提法是：求$u\in H_0^1(\Omega)$，使

$$a(u,v)=(f,v), \qquad \forall v\in H_0^1(\Omega).$$

习　　题

1. 设$\Omega=\{(x,y);r<1/2\}$，$u=\ln|\ln r|$，其中$r=(x^2+y^2)^{1/2}$. 验证$u\in H^1(\Omega)$，但$u\notin C(\Omega)$.

2. 如果$u\in H^1(\Omega)$，$v\in C^1(\bar{\Omega})$，证明$uv\in H^1(\Omega)$.

3. 如果区域Ω的边界$\partial\Omega$是分片光滑的，证明 Green 公式

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{n} u_i \cos(\nu, x_i) ds,$$

其中$u_i\in H^1(\Omega)(i=1,\cdots,n)$.

4. 设区域Ω的边界是分片光滑的，光滑曲面S将Ω分割为子区域Ω_1与Ω_2. 函数u在区域Ω_1与Ω_2上分别属于$H^1(\Omega_1)$与$H^1(\Omega_2)$，证明$u\in H^1(\Omega)$的充分必要条件是u在S的两侧的迹相同.

5. 对于边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u=f, & x\in\Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}+bu=g, & x\in\partial\Omega. \end{cases}$$

如果$f\in L^2(\Omega)$，$g\in L^2(\partial\Omega)$，$b\in C(\partial\Omega)$，并且$b\geqslant\delta>0$，给出弱解的定义，并在一维情形用 Lax-Milgram 定理证明弱解的存在唯一性.

6. 对于边值问题

$$\begin{cases} -u''+g(x)u=f(x), & x\in(a,b), \\ u(a)=u(b)=0, \end{cases}$$

其中$g\in C([a,b])$，$f\in L^2(a,b)$，$g(x)\geqslant 0$.

(a) 证明有唯一弱解$u\in H_0^1(a,b)$;

(b) 证明$u\in H^2(a,b)$;

(c) 如果$f\in C([a,b])$，证明$u\in C^2([a,b])$.

第二章　椭圆型边值问题的有限元方法(一)

§1　Галёркин方法与Ritz方法

1.1　Dirichlet问题，齐次边界条件

我们讨论平面区域Ω上的边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & (x,y)\in\Omega, \\ u = 0, & (x,y)\in\partial\Omega. \end{cases}$$

取空间$H_0^1(\Omega)$，令

$$a(u,v)=\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy,$$

则问题的弱解提法为：求$u\in H_0^1(\Omega)$，使

$$a(u,v)=(f,v),\qquad \forall v\in H_0^1(\Omega).\tag{1}$$

或者令

$$J(v)=\frac{1}{2}a(v,v)-(f,v),$$

求$u\in H_0^1(\Omega)$，使

$$J(u)=\min_{v\in H_0^1(\Omega)} J(v).\tag{2}$$

现在我们给一个有限维子空间$V_h\subset H_0^1(\Omega)$，并且提一个与原问题近似的问题：求$u_h\in V_h$，使

$$a(u_h,v)=(f,v),\qquad \forall v\in V_h.\tag{3}$$

u_h称为近似解，这个方法称为Галёркин方法．也可以换一个提法：求$u_h\in V_h$，使

$$J(u_h)=\min_{v\in V_h} J(v).\tag{4}$$

这个方法称为Ritz方法. 由第一章的定理 8 容易看出（3）与（4）是等价的. 由Lax-Milgram定理与Poincaré-Friedrichs不等式，它们的解是存在唯一的.

Галеркин 方法与Ritz方法都称为变分方法，经典的变分方法取光滑函数构成的有限维空间V_h，在实用上受很大限制. 所谓有限元方法，就是在变分方法中用剖分插值给出子空间V_h，所得到的函数是分片光滑的，它非常便于应用. 现在让我们看这一点是怎样实现的.

为了便于讨论，假设区域Ω是x,y平面上的多边形，并且以线性三角形单元为例. 将Ω分割为一系列三角形(图3)，它们称为单元，三角形的顶点称为节点. 要求每个单元的顶点只能是相邻单元的顶点，不能是相邻单元边界上的其它点. 所有单元的最大边长记为h. 将每个单元都编上号：Ω_1，$\Omega_2,\cdots,\Omega_e,\cdots,\Omega_M$. 将节点也编上号：$A_1,A_2,\cdots$，$A_i,\cdots$，$A_N$. 单元的编号次序完全可以任意. 节点的编号次序对求解步骤和结果没有影响，但是对求解代数方程组的工作量是有重大影响的.

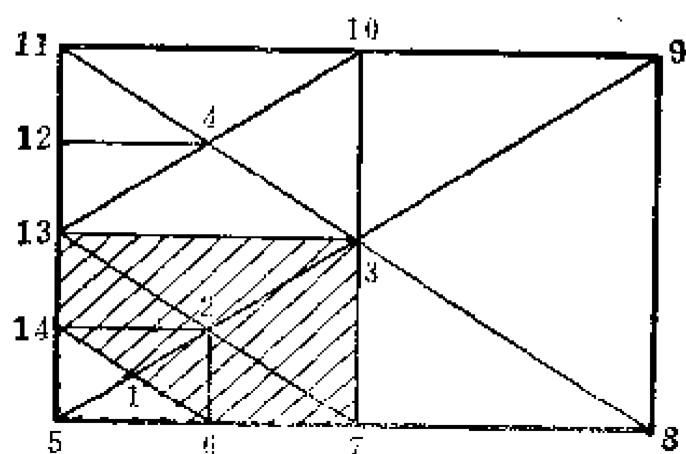


图 3

我们恒以$P_m(\Omega_e)$表示定义于Ω_e上的所有不高于m阶的

多项式的集合．令

$$V_h = \{u \in C(\bar{\Omega});\ u|_{\Omega_e} \in P_1(\Omega_e)(e=1,\cdots,M),$$
$$\text{并且当} A_i \in \partial\Omega,\ u(A_i) = 0\}.$$

由第一章§1例1可以看出 $V_h \subset H^1(\Omega)$．当 $u \in V_h$，它在边界节点上等于零，又是分段线性函数，所以 $u|_{\partial\Omega} = 0$，即有 $u \in H_0^1(\Omega)$．因此 V_h 是 $H_0^1(\Omega)$ 的子空间．

每一个 $u \in V_h$ 都可以用插值得到，只要给定 u 在节点上的值，在每个单元上可以唯一地确定一个线性函数．并且分片插值得到的函数在两个单元的相邻边上也是连续的．因此它在整个区域上连续，从而属于 V_h．

设 Ω 的内部节点共有 N_1 个，$N_1 < N$，则 V_h 是一个 N_1 维线性空间．设 $\varphi_i \in V_h$ 具有如下性质：

$$\varphi_i(A_j) = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i, \end{cases}$$

则 $\{\varphi_i\}$ 是 V_h 的一组基．为了叙述方便起见，我们约定将内部节点都排在前面（在实际计算中这一点并不必要），那么任一个 $u_h \in V_h$ 都可以唯一地表示为

$$u_h = \sum_{j=1}^{N_1} u_j \varphi_j,$$

其中 u_j 就是 u_h 在节点上的值．每个基函数 φ_j 仅在 A_j 点的邻近单元上不等于零．例如图3，φ_3 仅在阴影部分不等于零，它的三维图象很象一个金字塔．

令
$$v = \sum_{i=1}^{N_1} v_i \varphi_i,$$

则（3）可以写成

$$a\left(\sum_{j=1}^{N_1} u_j\varphi_j,\ \sum_{i=1}^{N_1} v_i\varphi_i\right)=\left(f,\ \sum_{i=1}^{N_1} v_i\varphi_i\right),$$
$$\forall v_i \in R$$

即
$$\sum_{i,j=1}^{N_1} u_j v_i a(\varphi_j,\varphi_i)=\sum_{i=1}^{N_1} v_i(f,\varphi_i),$$
$$\forall v_i\in R.$$

由v_i的任意性

$$\sum_{j=1}^{N_1} a(\varphi_j,\varphi_i)u_j=(f,\varphi_i),\qquad i=1,\cdots,N_1 \tag{5}$$

这就是u_j满足的方程组．令$k_{ij}=a(\varphi_j,\varphi_i)$，$f_i=(f,\varphi_i)$，引进矩阵与向量的记号．令$K=(k_{ij})$，$u=(u_j)$，$f=(f_i)$，则（5）可以写为

$$Ku=f.$$

按照力学上的背景，K称为总刚度矩阵，u称为位移向量，f称为载荷向量.

我们也可以用Ritz方法形成代数方程组．这时

$$J(v)=\frac{1}{2}a\left(\sum_{j=1}^{N_1} v_j\varphi_j,\ \sum_{i=1}^{N_1} v_i\varphi_i\right)-\left(f,\ \sum_{i=1}^{N_1} v_i\varphi_i\right).$$

为了求最小值，对v_i求偏微商得

$$\frac{\partial J(v)}{\partial v_i}=\frac{1}{2}a\left(\varphi_i,\ \sum_{j=1}^{N_1} v_j\varphi_j\right)+\frac{1}{2}a\left(\sum_{j=1}^{N_1} v_j\varphi_j,\varphi_i\right)$$
$$-(f,\varphi_i),\qquad i=1,\cdots,N_1.$$

由（4）
$$\frac{\partial J(u_h)}{\partial v_i}=0,\qquad i=1,\cdots,N_1.$$

利用a的对称性，同样得到了代数方程组（5）。这个结果是在我们意料中的，因为我们已经知道（3）与（4）的等价性.

矩阵K是一个对称正定矩阵. 它的对称性是a的对称性的直接推论. 它的正定性可以证明如下：任取非零向量u. 令

$$u_h=\sum_{j=1}^{N_1} u_j\varphi_j, \qquad \text{则} \quad u_h\neq 0,$$

$$\sum_{i,j=1}^{N_1} k_{ij}u_iu_j=a(u_h,u_h).$$

由第一章的（18）式 $a(u_h,u_h)\geqslant\alpha\|u_h\|_1^2>0$. 所以矩阵$K$是正定的.

1.2 Dirichlet问题，非齐次边界条件

我们讨论问题

$$\begin{cases}-\Delta u=f, & (x,y)\in\Omega,\\ u=g, & (x,y)\in\partial\Omega.\end{cases}$$

第一章的提法（14）对于构造有限元解是不方便的，因为$a(u_0,v)$中包含了大量的积分运算. 用提法（11）可以直接地构造有限元解. 取有限维子空间$V_h\subset H^1(\Omega)$，这时边界条件$u_h|_{\partial\Omega}=g$一般不可能精确地满足. 我们以定义在$\partial\Omega$上的函数g_I作为g的近似，使集合$\{u_h\in V_h;\ u_h|_{\partial\Omega}=g_I\}$非空. 然后考虑近似问题：求$u_h\in V_h$，$u_h|_{\partial\Omega}=g_I$，而且满足

$$a(u_h,v)=(f,v), \qquad \forall v\in V_h\cap H_0^1(\Omega).$$

如果仍采取上一段中的线性三角形单元，空间V_h与$V_h\cap H_0^1(\Omega)$就是

$$V_h=\{u\in C(\bar\Omega);\ u|_{\Omega_e}\in P_1(\Omega_e)\ \ (e=1,\cdots,M)\},$$

$$V_h \cap H_0^1(\Omega) = \{u \in V_h;\ 当 A_i \in \partial\Omega,\ u(A_i) = 0\}.$$

与（5）式类似地可得

$$\sum_{j=1}^{N} a(\varphi_j, \varphi_i) u_j = (f, \varphi_i), \qquad i = 1, \cdots, N_1. \qquad (6)$$

方程组（6）中的$u_{N_1+1}, \cdots, u_N$可以从边界条件确定，例如令

$$u_i = g(A_i), \qquad i = N_1 + 1, \cdots, N. \qquad (7)$$

这就相当于将g_I取作g的线性插值函数．将(7)式代入(6)式得

$$\sum_{j=1}^{N_1} a(\varphi_j, \varphi_i) u_j$$

$$= (f, \varphi_i) - \sum_{j=N_1+1}^{N} a(\varphi_j, \varphi_i) g(A_j),$$

$$i = 1, \cdots, N_1.$$

用上一段中的记号

$$\sum_{j=1}^{N_1} k_{ij} u_j = f_i - \sum_{j=N_1+1}^{N} k_{ij} g(A_j), \quad i = 1, \cdots, N_1.$$

1.3 Neumann问题

我们讨论问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & (x, y) \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g, & (x, y) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

第一章的提法（23）对于构造有限元解是不方便的，因为条件

$$\int_{\Omega} u dx = 0$$

是一个包含所有未知量u_j的复杂方程．用提法（21）可以直接地构造有限元解．取有限维子空间$V_h \subset H^1(\Omega)$，例如可以取得与上一段一样．对应的代数方程组是

$$\sum_{j=1}^{N} k_{ij} u_j = f_i + g_i, \qquad i = 1, \cdots, N, \tag{8}$$

其中

$$g_i = \int_{\partial \Omega} g \varphi_i ds.$$

下面讨论方程组（8）解的存在唯一性．我们证明，齐次方程组的基本解是$u = (1, \cdots, 1)^T$，即$u_h \equiv 1$．事实上，如果$u_h \in V_h$，使

$$a(u_h, v) = 0, \qquad \forall v \in V_h,$$

取$v = u_h$，则$a(u_h, u_h) = 0$．即$|u_h|_1 = 0$．从而u_h在Ω上恒等于常数．由齐次方程的基本解以及矩阵（k_{ij}）的对称性，方程组（8）有解的充分必要条件是

$$\sum_{i=1}^{N} (f_i + g_i) = 0.$$

但是

$$\sum_{i=1}^{N} \varphi_i \equiv 1,$$

因此方程组（8）有解的充分必要条件是

$$\int_{\Omega} f dx + \int_{\partial \Omega} g ds = 0, \tag{9}$$

与第一章（22）式一致．

如果条件（9）成立，我们可以附加一个条件在方程组（8）上，使它有唯一解．例如我们可以令$u_N = 0$，这样

也将任意常数确定下来了．这种做法相当于将方程组（8）的系数矩阵"划"去第N行与第N列，成为一个$N-1$阶代数方程组．

1.4　k_{ij}与f_i的算法

以上讨论的三种边值问题具有基本相同的系数矩阵，它只与方程有关．因此，一个通用的计算程序是先不理边界条件，计算矩阵（k_{ij}）．然后根据不同的边界条件对它进行适当加工，并且计算右端项，就可以得到相应的代数方程组．

令
$$k_{ij}^{(e)}=\int_{\Omega_e}\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\right)dxdy,\qquad(10)$$

则
$$k_{ij}=\sum_{e=1}^{M}k_{ij}^{(e)},\qquad i,j=1,\cdots,N,$$
$$(k_{ij})=\sum_{e=1}^{M}\left(k_{ij}^{(e)}\right)\qquad(11)$$

基函数φ_i仅在节点A_i的邻近单元上不等于零，由（10）式，当且仅当节点A_i，A_j都是单元Ω_e的顶点时，$k_{ij}^{(e)}$才不等于零．因此矩阵（$k_{ij}^{(e)}$）中最多只能有九个非零元素．

为了计算（11），引进单元刚度矩阵的概念．任取一个单元Ω_e，设它的节点为A_i,A_j,A_m．令

$$K^{(e)}=\begin{pmatrix}k_{ii}^{(e)} & k_{ij}^{(e)} & k_{im}^{(e)}\\ k_{ji}^{(e)} & k_{jj}^{(e)} & k_{jm}^{(e)}\\ k_{mi}^{(e)} & k_{mj}^{(e)} & k_{mm}^{(e)}\end{pmatrix}.$$

$K^{(e)}$称为与单元Ω_e对应的单元刚度矩阵．

如果已经求出所有单元的单元刚度矩阵，则矩阵($k_{ij}^{(e)}$)就由$K^{(e)}$中的元素及零元素组成．叠加以后即可以得矩阵（k_{ij}）．所有单元的单元刚度矩阵的计算公式是相同的，非

常便于用计算机计算，这是有限元方法的一个极大的优点．从计算（k_{ij}）的过程可以看出，它是一个稀疏矩阵．

下面给出单元刚度矩阵的算法．设A_i，A_j，A_m三点的坐标分别为（x_1，y_1），（x_2，y_2），（x_3，y_3）．令

$$D=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

它是三角形$\triangle A_iA_jA_m$的有向面积的二倍．当A_i，A_j，A_m的排列是逆时针方向时，$D>0$，反之，$D<0$．令

$$\lambda_1(x,y)=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\lambda_2(x,y)=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\lambda_3(x,y)=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}.$$

容易看出，在Ω_e内

$$\lambda_1=\varphi_i,\qquad \lambda_2=\varphi_j,\qquad \lambda_3=\varphi_m.$$

（10）式中的被积函数是常数，因此

$$K^{(e)}=\frac{|D|}{2}\begin{pmatrix} \frac{\partial\lambda_1}{\partial x} & \frac{\partial\lambda_1}{\partial y} \\ \frac{\partial\lambda_2}{\partial x} & \frac{\partial\lambda_2}{\partial y} \\ \frac{\partial\lambda_3}{\partial x} & \frac{\partial\lambda_3}{\partial y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial\lambda_1}{\partial x} & \frac{\partial\lambda_2}{\partial x} & \frac{\partial\lambda_3}{\partial x} \\ \frac{\partial\lambda_1}{\partial y} & \frac{\partial\lambda_2}{\partial y} & \frac{\partial\lambda_3}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

令

$$\xi_1=x_2-x_3,\qquad \xi_2=x_3-x_1,\qquad \xi_3=x_1-x_2,$$

$$\eta_1=y_2-y_3,\qquad \eta_2=y_3-y_1,\qquad \eta_3=y_1-y_2,$$

$$\omega_1=x_2y_3-x_3y_2,\quad \omega_2=x_3y_1-x_1y_3,\quad \omega_3=x_1y_2-x_2y_1.$$

则
$$D=\omega_1+\omega_2+\omega_3.$$

$$B=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial x} & \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial x} & \dfrac{\partial\lambda_3}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial y} & \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial y} & \dfrac{\partial\lambda_3}{\partial y} \end{pmatrix}=\frac{1}{D}\begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ -\xi_1 & -\xi_2 & -\xi_3 \end{pmatrix}.$$

$$K^{(e)}=\frac{|D|}{2}B^TB. \tag{12}$$

$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ 有直观的几何意义．将三角形单元中的一个内点$A(x,y)$ 与三节点联结，构成三个三角形，λ_i就是面积的比值

$$\lambda_1=\frac{\triangle AA_jA_m}{\triangle A_iA_jA_m},\qquad \lambda_2=\frac{\triangle AA_mA_i}{\triangle A_iA_jA_m},$$

$$\lambda_3=\frac{\triangle AA_iA_j}{\triangle A_iA_jA_m},$$

所以它又称为面积坐标（图4）．

计算f_i的方法是类似的．令

$$f_i^{(e)}=\int_{\Omega_e} f\varphi_i\,dx\,dy,$$

则
$$f_i=\sum_{e=1}^{n} f_i^{(e)}$$

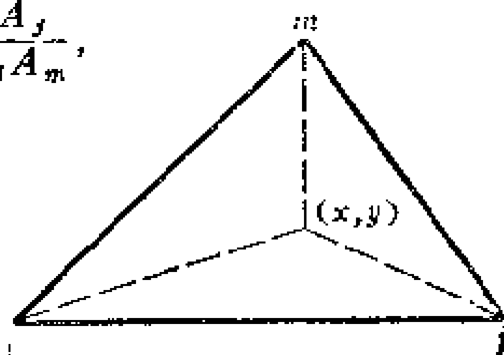


图 4

对于每个单元，作单元截荷向量

$$f^{(e)}=\int_{\Omega_e} f\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{pmatrix} dxdy,$$

然后按节点的编号分别叠加到适当的位置即得. 计算g_i的方法完全类似，此处不再赘述.

1.5 小结

以上的线性三角形单元是各种单元中最简单的一种，计算量小，也是精确度最低的一种. 以后我们还会遇到其它单元. 随方程不同，单元和计算公式也不同，但原理一样.

有限元方法的求解步骤是：

第一步 写出有限元方法的抽象形式，例如这里的(3)或(4)式.

第二步 剖分区域，选取插值函数，例如取这里的子空间V_h与插值函数φ_i.

第三步 求解，其中包括

(a) 计算单元刚度矩阵；

(b) 计算总刚度矩阵和方程右端；

(c) 求解代数方程组.

第四步 结果分析.

有限元方法的优点是：网格灵活，边界条件自然，程序通用. 因此，它的应用日益广泛，成为工程技术与科学研究的一个有力工具.

§2 有限元方法与差分方法的联系

设Ω是平面上的正方形区域. 在Ω上考虑Laplace方程

$$\Delta u=0.$$

将Ω均匀剖分成边长为h的正方形网格，再进一步分成三角形单元如图5。

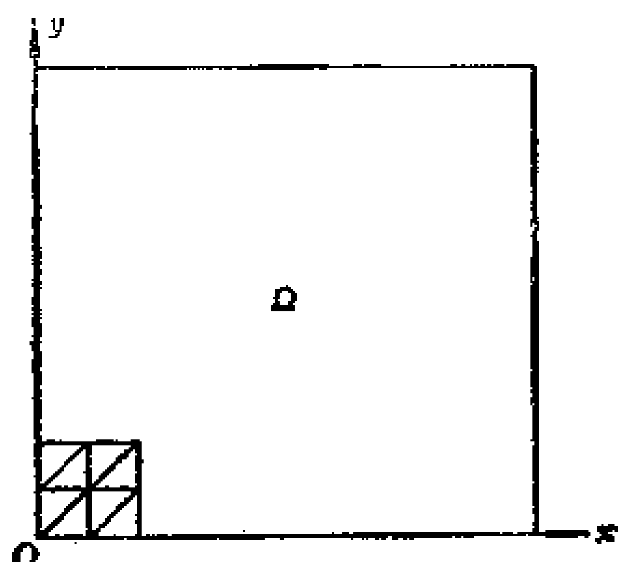


图 5

这时只有两种单元如图6，按照§1中的(12)式，可以求出它们的单元刚度矩阵。

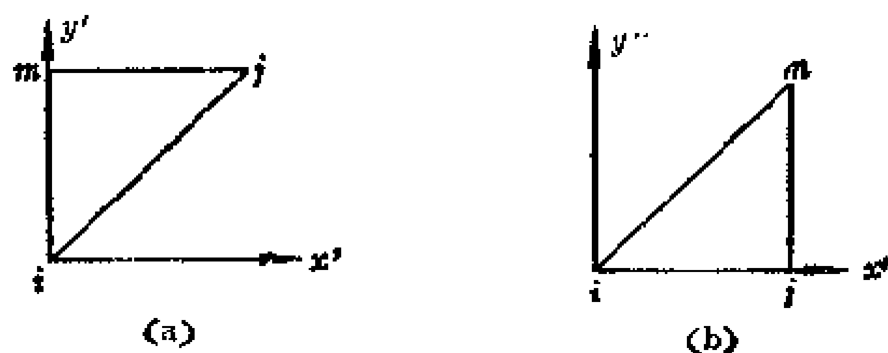


图 6

$$(\mathrm{a})\quad K^{(e)}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{b})\quad K^{(e)}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

取一个典型的内部节点，它的对应基函数的支集如图 7 所示．为简单起见，设节点编号与单元编号如图 7．

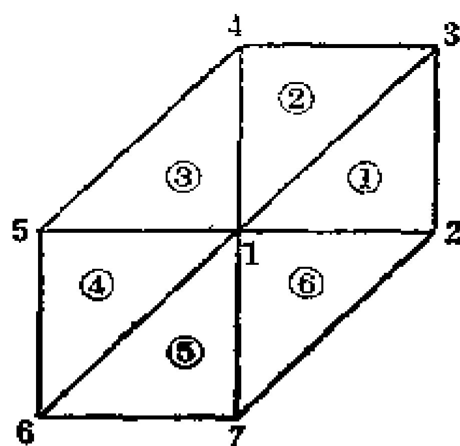


图 7

用叠加的方法可以得到总刚度矩阵的第一行如下：

	1	2	3	4	5	6	7
①	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0				
②	$\frac{1}{2}$		0	$-\frac{1}{2}$			
③	1			$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$		
④	$\frac{1}{2}$				$-\frac{1}{2}$	0	
⑤	$\frac{1}{2}$					0	$-\frac{1}{2}$
⑥	1	$-\frac{1}{2}$					$-\frac{1}{2}$
	4	-1	0	-1	-1	0	-1

这一行对应的方程是

$$4u_1-u_2-u_4-u_5-u_7=0. \tag{13}$$

我们再考虑差分方法，令

$$\frac{u_2-2u_1+u_5}{h^2}\doteq\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\qquad \frac{u_4-2u_1+u_7}{h^2}\doteq\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

则可以列出差分方程

$$\frac{-u_2+2u_1-u_5}{h^2}+\frac{-u_4+2u_1-u_7}{h^2}=0.$$

它就是常用的五点差分格式，与方程(13)一致．如果考虑Dirichlet条件

$$u|_{\partial\Omega}=g,$$

则在边界节点上，两种方法都是 $u(A_i)=g(A_i)$.

与差分方法比较，有限元方法可以适用于形状复杂的区域，网格也灵活得多．此外，当处理其它类型的边界条件时，有限元方法也自然得多．

很多差分格式可以用有限元方法导出，因此过去有限元方法的一个名称是“基于变分原理的差分格式”．

§3 结构的矩阵分析

在工程上广泛流行着有限元方法的另一种表述方法．这种方法不通过Соболев空间中的变分问题，而直接利用物理规律导出刚度矩阵和载荷向量．它的推导较为直观，涉及专业上的概念较多，在数学上不十分严密．结构的矩阵分析是有限元方法中最早发展起来的一个领域．在这一节，我们暂时放下以前的表述方法，介绍结构的矩阵分析．在下一节我们将用§1中的方法导出完全同样的方程组．

3.1 一个平面桁架的例子

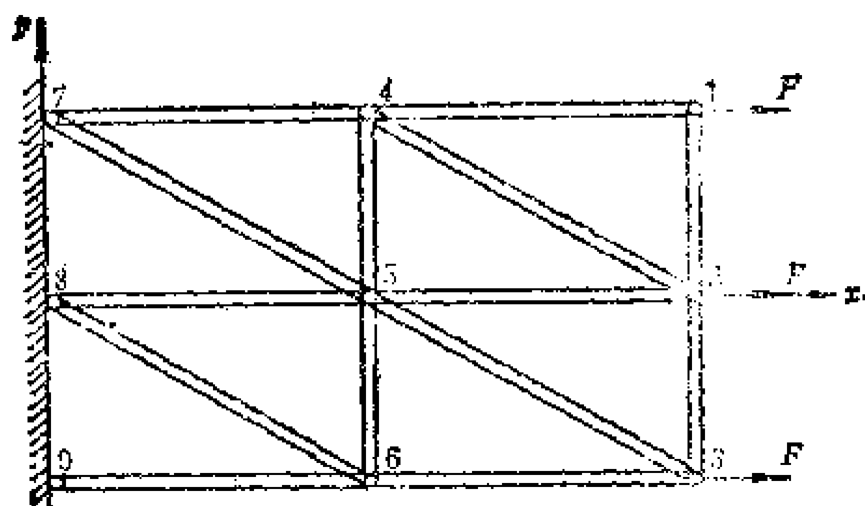


图 8

图 8 表示一个平面桁架系统，在$A_i(i=1, \cdots, 6)$处是铰接的，即各杆可以自由地绕这些点转动，在A_7, A_8, A_9处与刚性的壁面铰接，在A_1, A_2, A_3处有水平外力F. 点A_i ($i=1, \cdots, 9$)称为节点，各杆件$A_1A_4, A_2A_4, A_1A_2, \cdots$称为单元。现在要计算各节点的位移和各单元的受力情况．为此，建立坐标系如图8，设A_i点的位移是(u_i, v_i)，其中u_i是沿x方向的位移，v_i是沿y方向的位移．我们先分析一个典型的单元．设有一个长为l的杆件，截面积为S，它的两个端点是A_i和A_j（图 9）在A_i点受到的力是(f_{xi}, f_{yi})；在A_j点受到的力是(f_{xj}, f_{yj})．设杆件服从Hooke定律

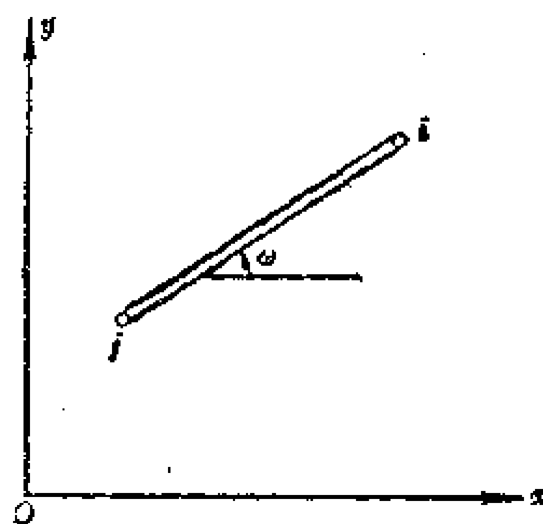


图 9

$$\sigma = Ee,$$

其中σ是应力，它表示单位面积上受到的轴向拉力．当杆件受压时，σ为负，e是应变，它可以表示为

$$\varepsilon=\frac{\Delta l}{l},$$

其中Δl是杆件在外力作用下的伸长量．当杆件缩短时 Δl为负值．E称为Young模量，它与杆件的材料有关．

下面我们推导节点上的载荷 (f_{xi},f_{yi})，(f_{xj},f_{yj}) 与位移 (u_i,v_i)，(u_j,v_j) 的关系．假定杆的轴线与x轴的夹角为ω，这时杆件的伸长是

$$\Delta l=\{(l\cos\omega+u_i-u_j)^2+(l\sin\omega+v_i-v_j)^2\}^{1/2}-l.$$

如果变形是“小”的，换句话说，以上表达式中u_i,u_j,v_i,v_j很小，以至于它们的二次项可以忽略，我们就可以得到

$$\begin{aligned}\Delta l&\doteq\{l^2\cos^2\omega+2l\cos\omega(u_i-u_j)+l^2\sin^2\omega\\&\quad+2l\sin\omega(v_i-v_j)\}^{1/2}-l\\&=l\left\{\left[1+\frac{2}{l}\cos\omega(u_i-u_j)+\right.\right.\\&\quad\left.\left.+\frac{2}{l}\sin\omega(v_i-v_j)\right]^{1/2}-1\right\}\\&\doteq l\left\{\frac{\cos\omega}{l}(u_i-u_j)+\frac{\sin\omega}{l}(v_i-v_j)\right\},\end{aligned}$$

即

$$\varepsilon=\frac{\cos\omega}{l}(u_i-u_j)+\frac{\sin\omega}{l}(v_i-v_j).$$

写成矩阵形式，令 $\delta_e=(u_i,v_i,u_j,v_j)^T$，

$$B=\frac{1}{l}(\cos\omega,\sin\omega,-\cos\omega,-\sin\omega),$$

则

$$\varepsilon=B\delta_e.$$

由Hooke定律得

$$\sigma=EB\delta_e.$$

令

$$f^{(e)}=(f_{xi},f_{yi},f_{xj},f_{yj})^T,$$

从图 9 可以看出

$$f^{(e)}=\sigma SlB^T.$$

因此
$$f^{(e)}=ESlB^TB\delta_e=K^{(e)}\delta_e, \tag{14}$$

其中
$$K^{(e)}=ESlB^TB,$$

它称为单元刚度矩阵. 容易看出$K^{(e)}$是对称半正定的. 我们将单元编号, 记作$\Omega_e(e=1,\cdots,14)$.

在每个节点上, 各杆件受到的合力应该等于作用在这个节点上的外力. 例如在节点A_3处, 单元A_1A_3, A_3A_5, A_3A_6所对应的力(f_{x3},f_{y3})之和应该等于$(F,0)$. 在每个节点处可以有两个方程, 节点$A_i(i=1,\cdots,6)$共对应了12个方程. 通过(14), (f_{xi},f_{yi})可以由(u_i,v_i)表示. 我们得到了由12个方程构成的方程组

$$K\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}, \tag{15}$$

其中K称为总刚度矩阵, 它由各$K^{(e)}$的元素叠加而得. $\boldsymbol{u}=(u_1,v_1,\cdots,u_6,v_6)^T$, $\boldsymbol{f}=(F,0,F,0,F,0,0,\cdots,0)^T$, 分别称为位移向量与载荷向量.

在总刚度矩阵中各元素的相对位置不一定与单元刚度矩阵中各元素的相对位置一致, 单元刚度矩阵不是整个作为一个子块叠加上去, 而是将各元素按节点顺序"对号入座"叠加上去的. 在叠加时还会遇到对应了节点A_7, A_8, A_9的单元, 这时有一些元素不必叠加上去, 因为在这些点上位移为零, 是已知的, 在这些点上也不要建立平衡方程.

先解方程组(15), 求出$\boldsymbol{u}$, 然后利用(14), 每个单元的受力情况就求出来了. 我们还可以算出应力来.

3.2 一个平面应力问题的例子

我们考虑一块平面弹性体$A_1A_7A_9A_3$, y方向铅直向上,

弹性体的厚度不太大，以至可以作为平面应力问题求解．在边A_1A_3上有均匀分布力作用，单位面积上受力为p，方向水平，同时弹性体还受到重力作用，在A_7A_9边上，弹性体与一刚性的壁面连接（图10）．我们计算各点的应力和位移．为了书写方便，不失一般性，下面假定厚度为1．

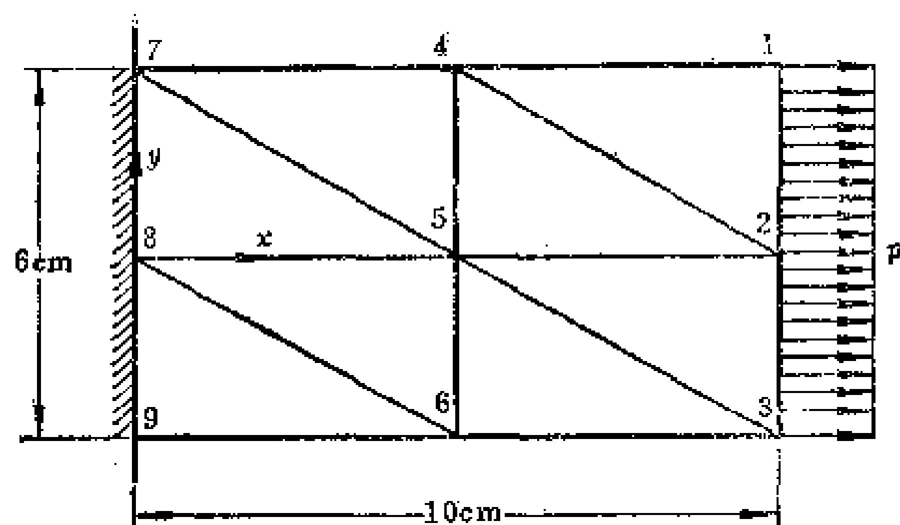


图 10

将平板剖分成八个三角形单元如图10，节点是$A_i(i=1,\cdots,9)$．假想每一个单元受到的力用节点处的集中力代替，它称为等效节点力．取一个典型的单元Ω_e（图11）．于是，单元刚度矩阵就是表示节点处的位移(u_i,v_i)，(u_j,v_j)，(u_m,v_m)与节点处的载荷(f_{xi},f_{yi})，(f_{xj},f_{yj})，(f_{xm},f_{ym})之间关系的矩阵．对于这个问题，如果我们企图求出它的精确解，那么我们就要解一个与原问题同样困难的问题．现在我们只求它的近似解．假设在此单元内部位移是线性分布的，它就可以表示为

$$u(x,y)=\lambda_1(x,y)u_i+\lambda_2(x,y)u_j+\lambda_3(x,y)u_m,$$

$$v(x,y)=\lambda_1(x,y)v_i+\lambda_2(x,y)v_j+\lambda_3(x,y)v_m,$$

其中λ_l是面积坐标$(l=1,2,3)$．

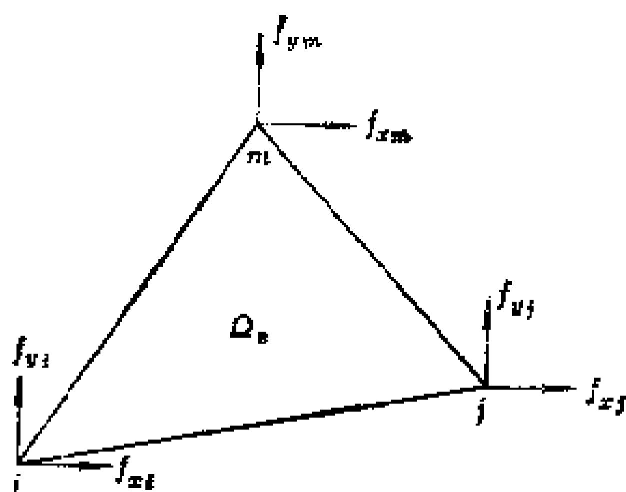


图 11

按照广义Hooke定律

$$\boldsymbol{\sigma}=R\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{16}$$

其中

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{pmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{\varepsilon}=\begin{pmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{pmatrix}, \tag{17}$$

$$R=\begin{pmatrix}\lambda+2\mu & \lambda & 0\\ \lambda & \lambda+2\mu & 0\\ 0 & 0 & \mu\end{pmatrix},$$

λ与μ是Lamé常数，它们和Young模量E、Poisson比θ之间的关系是

$$\lambda=\frac{\theta E}{1-\theta^2},\qquad \mu=\frac{E}{2(1+\theta)}.$$

计算得

$$\varepsilon = B(u_i, v_i, u_j, v_j, u_m, v_m)^T \tag{18}$$

其中

$$B = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} \eta_1 & 0 & \eta_2 & 0 & \eta_3 & 0 \\ 0 & -\xi_1 & 0 & -\xi_2 & 0 & -\xi_3 \\ -\xi_1 & \eta_1 & -\xi_2 & \eta_2 & -\xi_3 & \eta_3 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

D与$\eta_l, \xi_l (l=1,2,3)$ 已在§1中给出. 令$\boldsymbol{\delta}_e = (u_i, v_i, u_j, v_j, u_m, v_m)^T$, 则单元上的应力为$\sigma = RB\boldsymbol{\delta}_e$.

现在假定在节点上有一个虚位移$\boldsymbol{\delta}_e^*$, 与之对应的在单元上的虚位移就是

$$u^*(x,y) = \lambda_1(x,y)u_i^* + \lambda_2(x,y)u_j^* + \lambda_3(x,y)u_m^*,$$

$$v^*(x,y) = \lambda_1(x,y)v_i^* + \lambda_2(x,y)v_j^* + \lambda_3(x,y)v_m^*,$$

虚应变就是

$$\varepsilon^* = B\delta_e^*.$$

应力在虚应变上作的虚变形功等于

$$U = \int_{\Omega_e} (\varepsilon^*)^T \sigma \, dx dy = \int_{\Omega_e} (\boldsymbol{\delta}_e^*)^T B^T R B \boldsymbol{\delta}_e \, dx dy$$

$$= \frac{|D|}{2} (\boldsymbol{\delta}_e^*)^T B^T R B \boldsymbol{\delta}_e = (\boldsymbol{\delta}_e^*)^T K^{(e)} \boldsymbol{\delta}_e \ .$$

其中 $K^{(e)} = \frac{|D|}{2} B^T R B$称为单元刚度矩阵. 令$\boldsymbol{f}^{(e)} = (f_{xi}, f_{yi}, f_{xj}, f_{yj}, f_{xm}, f_{ym})^T$, 则节点上的等效节点力作的虚功是

$$W = (\boldsymbol{\delta}_e^*)^T \boldsymbol{f}^{(e)}.$$

按照虚功原理, 外力作的虚功应等于应力在虚应变上作的虚变形功, 即

$$U = W.$$

但是$\boldsymbol{\delta}_e^*$是任意的，因此有

$$K^{(e)}\boldsymbol{\delta}_e=\boldsymbol{f}^{(e)}. \tag{20}$$

（20）式与上例中的（14）式相当．和前面一样，在每个节点上各单元受到的等效节点力之和应该等于在这个节点上的外力，现在分布力p和重力都不是作用在节点上的集中力，我们要把它们"转移"到节点上去，方法是使它们与某些作用在节点上的集中力虚功相等．设密度为ρ，重力加速度为g，则单元上重力作的虚功是

$$W_1=-\int_{\Omega_e}\rho g v^*(x,y)dxdy$$
$$=-\rho g\int_{\Omega_e}\left\{\lambda_1(x,y)v_i^*+\lambda_2(x,y)v_j^*+\lambda_3(x,y)v_m^*\right\}dxdy,$$

但是

$$\int_{\Omega_e}\lambda_1(x,y)dxdy$$
$$=\frac{1}{D}\int_{\Omega_e}(\eta_1 x-\xi_1 y+\omega_1)dxdy$$
$$=\frac{1}{D}\left(\eta_1\frac{x_1+x_2+x_3}{3}-\xi_1\frac{y_1+y_2+y_3}{3}+\omega_1\right)\frac{|D|}{2}$$
$$=\frac{|D|}{6}.$$

λ_2,λ_3的积分可以同样计算．因此

$$W_1=-\frac{\rho g|D|}{6}(v_i^*+v_j^*+v_m^*).$$

设重力对应的等效节点力是$\boldsymbol{f}_1^{(e)}$，则

$$W_1=(\boldsymbol{\delta}_e^*)^T\boldsymbol{f}_1^{(e)},$$

即有

$$\boldsymbol{f}_1^{(e)}=-\frac{\rho g|D|}{6}(0,1,0,1,0,1)^T.$$

好象将重力平均分配到三个节点上．对表面力p的处理是同样的．设它们作用于垂直边A_jA_m上（图12），p的方向是水平的．单元上表面力作的虚功是

$$W_2=\int_{y_j}^{y_m}p\left(u_j^*\frac{y_m-y}{y_m-y_j}+u_m^*\frac{y-y_j}{y_m-y_j}\right)dy$$

$$=\frac{y_m-y_j}{2}p(u_j^*+u_m^*).$$

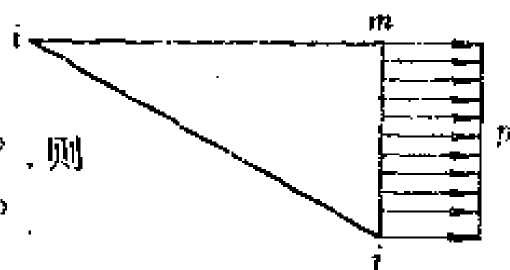


图 12

设表面力对应的等效节点力是$f_2^{(e)}$，则

$$W_2=(\delta_e^*)^T f_2^{(e)}.$$

即有

$$f_2^{(e)}=\frac{y_m-y_j}{2}p(0,0,1,0,1,0)^T.$$

好象将表面力平均分配到两个节点上．

和上一个例子一样，将各单元刚度矩阵叠加得总刚度矩阵K．同时，将各节点上的等效节点力$f_1^{(e)}$，$f_2^{(e)}$叠加得载荷向量f，就得方程组（15）．解之求出位移u，由(16)，(18)，(19)求出应力σ．

§4 两种有限元表述法的一致性

我们已经介绍了两种有限元的表述法．一种是从变分问题的弱解出发，引进有限维子空间的Галёркин方法与Ritz方法；另一种是直接从物理规律出发，通过对典型单元的分析，然后装配成方程组的方法．虽然出发点不同，实际上它们是一致的．在这一节我们通过例子说明这一点．

现在我们用§1的表述法重述3.2段中的例子．设单位体积上弹性体受到的外力为(f_x, f_y)，则与虚功原理等价的平衡方程是

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+f_x=0\\[2ex]\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}+f_y=0\end{cases}\tag{21}$$

由（16），（17）式

$$\begin{cases}\sigma_x=(\lambda+2\mu)\dfrac{\partial u}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial v}{\partial y},\\[2ex]\sigma_y=\lambda\dfrac{\partial u}{\partial x}+(\lambda+2\mu)\dfrac{\partial v}{\partial y},\\[2ex]\tau_{xy}=\mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\end{cases}\tag{22}$$

设区域Ω的边界$\partial\Omega$分成两部分，分别有位移边界条件与外力边界条件　在Γ_1上位移等于零，在Γ_2上单位表面积上的外力是(g_x,g_y)，则有

$$(u,v)|_{\Gamma_1}=0,\tag{23}$$

$$\begin{cases}\sigma_x\cos(\nu,x)+\tau_{xy}\cos(\nu,y)|_{\Gamma_2}=g_x,\\ \tau_{xy}\cos(\nu,x)+\sigma_y\cos(\nu,y)|_{\Gamma_2}=g_y.\end{cases}\tag{24}$$

(21)—(24)就是平面应力问题的一个完整提法.

可以将(22)代入(21)，消去$\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$，得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\left\{(\lambda+2\mu)\dfrac{\partial u}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial v}{\partial y}\right\}+\mu\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)+f_x=0,\\[2ex]\mu\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left\{(\lambda+2\mu)\dfrac{\partial v}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial u}{\partial x}\right\}+f_y=0.\end{cases}$$

这就是位移满足的方程组，它称为 Lamé 方程．用向量形式可以将它写得简短一些，令

$$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}=\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}.$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \operatorname{grad}\varphi=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix},$$

则可以整理得

$$-\mu\Delta\boldsymbol{u}-(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\ \operatorname{div}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}. \tag{25}$$

(23)—(25)与我们在§1中解的边值问题都是椭圆型方程的边值问题，它们的处理方法是类似的。

令$C_0^\infty(\Omega\cup\Gamma_2)=\{u\in C^\infty(\bar{\Omega})$；$u$的支集在$\Omega\cup\Gamma_2$上是紧的$\}$. 取两个函数$u^*$, $v^*\in C_0^\infty(\Omega\cup\Gamma_2)$作为试探函数．令$\boldsymbol{u}^*=(u^*,v^*)^T$，将$u^*$与$v^*$分别与(21)的两个方程相乘，两式相加，在区域$\Omega$上积分，利用Green公式和边界条件(24)得

$$\int_\Omega\left(\sigma_x\frac{\partial u^*}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial v^*}{\partial y}+\tau_{xy}\left(\frac{\partial u^*}{\partial y}+\frac{\partial v^*}{\partial x}\right)\right)dxdy$$

$$=\int_\Omega(u^*f_x+v^*f_y)\,dxdy+\int_{\Gamma_2}(u^*g_x+v^*g_y)ds \tag{26}$$

利用方程(22)，令

$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}^*)$

$$=\int_\Omega\left\{\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\frac{\partial v}{\partial y}\right]\frac{\partial u^*}{\partial x}+\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial v}{\partial y}+\right.\right.$$

$$+\lambda\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v^*}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u^*}{\partial y}+\frac{\partial v^*}{\partial x}\right)\Big\}dxdy,$$

$$F(\boldsymbol{u}^*)=\int_\Omega(u^*f_x+v^*f_y)\,dxdy+\int_{\Gamma_2}(u^*g_x+v^*g_y)\,ds,$$

则(26)式可以写成

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}^*)=F(\boldsymbol{u}^*).$$

如果我们不用方程(21),(22)而用方程(25)，可以得到同样结果．令

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}\\[2mm]\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2mm]\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{\varepsilon}^*=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u^*}{\partial x}\\[2mm]\dfrac{\partial v^*}{\partial y}\\[2mm]\dfrac{\partial u^*}{\partial y}+\dfrac{\partial v^*}{\partial x}\end{pmatrix},$$

则以上双线性泛函又可以写成

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}^*)=\int_\Omega(\boldsymbol{\varepsilon}^*)^T R\boldsymbol{\varepsilon}\,dxdy. \qquad (27)$$

设集合$C_0^\infty(\Omega\cup\Gamma_2)$在空间$H^1(\Omega)$中的闭包是$H_0^1(\Omega\cup\Gamma_2)$. 它是$H^1(\Omega)$的一个子空间．问题(21)—(24)的弱解提法是：求$\boldsymbol{u}\in(H_0^1(\Omega\cup\Gamma_2))^2$，使

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}^*)=F(\boldsymbol{u}^*)\qquad \forall\boldsymbol{u}^*\in(H_0^1(\Omega\cup\Gamma_2))^2. \qquad (28)$$

可以用Lax-Milgram定理讨论问题(28)的解的存在唯一性．这里我们不准备给出证明，只讨论它的有限元格式．

取$H_0^1(\Omega\cup\Gamma_2)$的有限维子空间$V_h$，则有限元方法的提法是：求$\boldsymbol{u}_h\in(V_h)^2$，使

$$a(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{u}^*) = F(\boldsymbol{u}^*), \quad \forall \boldsymbol{u}^* \in (V_h)^2. \tag{29}$$

如果仍用§1中的三角形剖分，则

$$V_h = \{u \in C(\bar{\Omega}); u|_{\Omega_e} \in P_1(\Omega_e) \ (e=1, \cdots, M),$$
$$\text{并且当} A_i \in \Gamma_1, \ u(A_i) = 0\}.$$

设$\Omega \cup \Gamma_2$上节点共N_1个，则$\boldsymbol{u}_h$与$\boldsymbol{u}^*$可以表示为

$$\boldsymbol{u}_h = \sum_{j=1}^{N_1} \begin{pmatrix} u_j \\ v_j \end{pmatrix} \varphi_j, \qquad \boldsymbol{u}^* = \sum_{i=1}^{N_1} \begin{pmatrix} u_i^* \\ v_i^* \end{pmatrix} \varphi_i.$$

设向量$\boldsymbol{u}_h$的两个分量是u_h与v_h，令

$$\boldsymbol{\varepsilon}_h = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_h}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_h}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u_h}{\partial y} + \dfrac{\partial v_h}{\partial x} \end{pmatrix}, \qquad B_j = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial y} & \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

则
$$\boldsymbol{\varepsilon}_h = \sum_{j=1}^{N_1} B_j \begin{pmatrix} u_j \\ v_j \end{pmatrix}.$$

同理，
$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \sum_{i=1}^{N_1} B_i \begin{pmatrix} u_i^* \\ v_i^* \end{pmatrix}.$$

由(27)式

$$a(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{u}^*) = \int_\Omega (\boldsymbol{\varepsilon}^*)^T R \boldsymbol{\varepsilon}_h dxdy$$
$$= \sum_{i,j=1}^{N_1} \int_\Omega (u_i^*, v_i^*) B_i^T R B_j \begin{pmatrix} u_j \\ v_j \end{pmatrix} dxdy.$$

由于F是线性泛函

$$F(\boldsymbol{u}^*)=F\left(\sum_{i=1}^{N_1}\binom{u_i^*}{v_i^*}\varphi_i\right)=\sum_{i=1}^{N_1}(u_i^*,v_i^*)\begin{pmatrix}F\left(\binom{\varphi_i}{0}\right)\\ \\ F\left(\binom{0}{\varphi_i}\right)\end{pmatrix}.$$

令
$$k_{ij}=\int_\Omega B_i^T R B_j dxdy,$$

$$\boldsymbol{f}_i=\begin{pmatrix}F\left(\binom{\varphi_i}{0}\right)\\ \\ F\left(\binom{0}{\varphi_i}\right)\end{pmatrix}.$$

由u_i^* v_i^*的任意性，方程(29)可以写成

$$\sum_{j=1}^{N_1}k_{ij}\binom{u_j}{v_j}=\boldsymbol{f}_i,\quad i=1,\cdots,\boldsymbol{N}_1. \tag{30}$$

这就是u_j, v_j满足的代数方程组. $K=(k_{ij})$称为总刚度矩阵 $\boldsymbol{f}=(\boldsymbol{f}_i)$称为载荷向量

令
$$k_{ij}^{(e)}=\int_{\Omega_e}B_i^T R B_j dxdy,$$

则
$$k_{ij}=\sum_{e=1}k_{ij}^{(e)}$$

对于图 4 所表示的单元，引进单元刚度矩阵

$$K^{(e)}=\begin{pmatrix}k_{ii}^{(e)} & k_{ij}^{(e)} & k_{im}^{(e)}\\ k_{ji}^{(e)} & k_{jj}^{(e)} & k_{jm}^{(e)}\\ k_{mi}^{(e)} & k_{mj}^{(e)} & k_{mm}^{(e)}\end{pmatrix}.$$

与§1不同的是，$K^{(e)}$是一个六阶矩阵，它的元素是二阶子块. 令

$$B=(B_i,\ B_j,\ B_m).$$

则在单元Ω_e上B的表达式就是(19).因此

$$K^{(e)}=\frac{|D|}{2}B^T RB,$$

与§3中的表达式完全一致．f_i也是通过对单元的叠加而得到的：

$$f_i=\int_\Omega\begin{pmatrix}\varphi_i f_x\\ \varphi_i f_y\end{pmatrix}dxdy+\int_{\Gamma_2}\begin{pmatrix}\varphi_i g_x\\ \varphi_i g_y\end{pmatrix}ds$$

$$=\sum_{e=1}^{M}\left\{\iint_{\Omega_e}\begin{pmatrix}\varphi_i f_x\\ \varphi_i f_y\end{pmatrix}dxdy+\int_{\Gamma_2\cap\partial\Omega_e}\begin{pmatrix}\varphi_i g_x\\ \varphi_i g_y\end{pmatrix}ds\right\}.$$

对于单元Ω_e，积分项最多只有三个分量不等于零，它们是

$$\int_{\Omega_e}\begin{pmatrix}\lambda_l f_x\\ \lambda_l f_y\end{pmatrix}dxdy+\int_{\Gamma_2\cap\partial\Omega_e}\begin{pmatrix}\lambda_l g_x\\ \lambda_l g_y\end{pmatrix}ds\quad l=1,2,3.$$

按单元求出以上各非零分量以后，按下标i叠加可以得到方程组（30）的右端，与§3中的结果一致．

§5 高阶方程

对于高于二阶的椭圆型方程，单元插值函数较繁．我们将关于四阶偏微分方程的讨论放在第四章，这里仅讨论四阶常微分方程的边值问题．考虑

$$\begin{cases}\dfrac{d^4u}{dx^4}=f, & x\in(0,1),\\ u(0)=u'(0)=u(1)=u'(1)=0\end{cases}\tag{31}$$

设$u\in C^4([0,1])$，取试探函数$v\in C_0^\infty(0,1)$与方程相乘，在区间（0,1）上积分，并作两次分部积分得

$$\int_0^1 u''v''dx=\int_0^1 fv\,dx.$$

令 $$a(u,v)=\int_0^1 u''v''dx.$$

同时注意到$C_0^\infty(0,1)$在$H^2(0,1)$中的闭包是$H_0^2(0,1)$，则有

$$a(u,v)=(f,v),\qquad \forall v\in H_0^2(0,1). \tag{32}$$

因此边值问题（31）的弱解提法是：求$u\in H_0^2(0,1)$，使(32)式成立.

现在构造问题（32）的有限元解法. 设V_h为$H_0^2(0,1)$的有限维子空间. 我们求$u_h\in V_h$，使

$$a(u_h,v)=(f,v),\quad \forall v\in V_h. \tag{33}$$

最简单的构造V_h的方法是取三次单元，将区间[0,1]作剖分. 取节点$0=x_0<x_1<\cdots<x_N=1$，记区间(x_{i-1},x_i)为单元Ω_i. 则$V_h=\{u\in C^1([0,1])$；$u|_{\Omega i}\in P_3(\Omega_i)$ $(i=1,\cdots,N)$，$u(0)=u'(0)=u(1)=u'(1)=0\}$. 可以证明$V_h$是$H_0^2(0,1)$的子空间. 当$u\in V_h$，在每个单元上$u$的值被它在端点上的函数值及一阶微商值所唯一确定. V_h的基可以写成两组φ_i,ψ_i $(i=1,\cdots,N-1)$，定义如下：

$$(\varphi_i(x_j),\varphi_i'(x_j))=\begin{cases}(1,0), & j=i,\\ (0,0), & j\neq i,\end{cases}$$

$$(\psi_i(x_j),\psi_i'(x_j))=\begin{cases}(0,1), & j=i,\\ (0,0), & j\neq i.\end{cases}$$

这时 $$u_h=\sum_{j=1}^{N-1}u_j^{(1)}\varphi_j+\sum_{j=1}^{N-1}u_j^{(2)}\psi_j,$$

$u_j^{(1)}$就是u_h在x_j点的值，而$u_j^{(2)}$就是u_h'在x_j点的值. 令

$$v=\sum_{i=1}^{N-1}v_i^{(1)}\varphi_i+\sum_{i=1}^{N-1}v_i^{(2)}\psi_i,$$

代入(33)式得

$$\sum_{i,j=1}^{N-1} a(u_j^{(1)}\varphi_j+u_j^{(2)}\psi_j, v_i^{(1)}\varphi_i+v_i^{(2)}\psi_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{N-1}(f, v_i^{(1)}\varphi_i+v_i^{(2)}\psi_i).$$

由$v_i^{(1)}$与$v_i^{(2)}$的任意性，

$$\sum_{j=1}^{N-1}(u_j^{(1)}a(\varphi_j,\varphi_i)+u_j^{(2)}a(\psi_j,\varphi_i))=(f,\varphi_i),$$

$$\sum_{j=1}^{N-1}(u_j^{(1)}a(\varphi_j,\psi_i)+u_j^{(2)}a(\psi_j,\psi_i))=(f,\psi_i),$$

$$i=1,\cdots,N-1$$

即

$$\sum_{j=1}^{N-1}\begin{pmatrix} a(\varphi_j,\varphi_i) & a(\psi_j,\varphi_i) \\ a(\varphi_j,\psi_i) & a(\psi_j,\psi_i)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_j^{(1)} \\ u_j^{(2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(f,\varphi_i) \\ (f,\psi_i)\end{pmatrix},$$

$$i=1,\cdots,N-1.$$

作列向量$\boldsymbol{u}=(u_1^{(1)},u_1^{(2)},u_2^{(1)},u_2^{(2)},\cdots)^T$，$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots)^T$，其中$f_{2i-1}=(f,\varphi_i)$，$f_{2i}=(f,\psi_i)$，则方程组又可以写为

$$K\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f},$$

其中总刚度矩阵

$$K=\begin{pmatrix} k_{1,1} & \cdots & k_{1,N-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{N-1,1} & \cdots & k_{N-1,N-1}\end{pmatrix}.$$

它是一个分块矩阵，每个k_{ij}是一个2×2子块

$$k_{ij}=\begin{pmatrix} a(\varphi_j,\varphi_i) & a(\psi_j,\varphi_i) \\ a(\varphi_j,\psi_i) & a(\psi_j,\psi_i)\end{pmatrix}.$$

总刚度矩阵K可以由单元刚度矩阵叠加而得．任取一个单元Ω_e，令

$$k_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega_e} \begin{pmatrix} \varphi_i''\varphi_j'' & \psi_i''\varphi_j'' \\ \varphi_i''\psi_j'' & \psi_i''\psi_j'' \end{pmatrix} dx,$$

则
$$k_{ij} = \sum_{e=1}^{N} k_{ij}^{(e)}.$$

只有当i,j同时为$e-1$或e时，$k_{ij}^{(e)}$才不等于零. 因此，单元刚度矩阵定义为

$$K^{(e)} = \begin{pmatrix} k^{(e)}_{e-1,e-1} & k^{(e)}_{e-1,e} \\ k^{(e)}_{e,e-1} & k^{(e)}_{e,e} \end{pmatrix}.$$

它是一个对称矩阵. 计算得

$$K^{(e)} = \begin{pmatrix} \frac{12}{h_e^3} & \frac{6}{h_e^2} & -\frac{12}{h_e^3} & \frac{6}{h_e^2} \\ & \frac{4}{h_e} & -\frac{6}{h_e^2} & \frac{2}{h_e} \\ & & \frac{12}{h_e^3} & -\frac{6}{h_e^2} \\ & \cdot & & \frac{4}{h_e} \end{pmatrix}.$$

在计算总刚度矩阵时，将单元刚度矩阵的元素，按节点编号逐个叠加. 当$i=1, N$时，要"划"去与节点x_0, x_N有关的行与列.

与过去对二阶方程所做的插值不同，这里采用的是Hermite型的插值，不仅节点上的函数值是已知的，而且一阶微商也是已知的.

可以用Lax-Milgram定理证明问题(32)以及(33)解的存在唯一性，我们把它留作习题，现在用更初等的方法证

明(33)的解的存在唯一性. 我们只要证明与(33)对应的齐次方程组只有零解就够了. 设$u_h\in V_h$满足齐次方程

$$a(u_h,v)=0,\quad \forall v\in V_h.$$

取$v=u_h$得$a(u_h,u_h)=0$,因此$v_h''(x)\equiv 0$. 即u_h在每个单元上是线性函数. 由$u_h'(0)=0$可以逐个单元归纳得$u_h'(x)\equiv 0$, 由$u_h(0)=0$归纳得$u_h(x)\equiv 0$.

我们再考虑一个例:

$$\begin{cases} \dfrac{d^4u}{dx^4}=f, & x\in(0,1), \\ u(0)=u''(0)=u(1)=u''(1)=0. \end{cases}$$

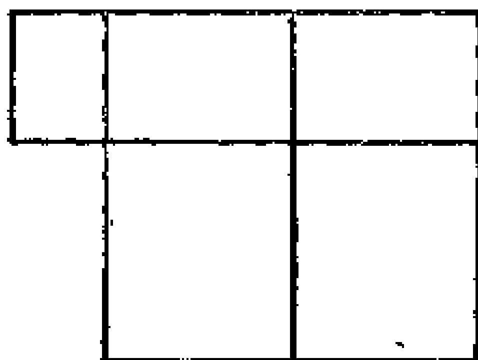
设$u\in C^4([0,1])$,取试探函数$v\in C^\infty([0,1])$,并要求$v(0)=v(1)=0$,将v与方程相乘,在区间(0,1)上积分,并作两次分部积分,利用u满足的边界条件得

$$a(u,v)=(f,v). \tag{34}$$

由第一章§1,$C^\infty([0,1])$在$H^2(0,1)$中是稠密的,经过一个逼近过程,可以知道只要$v\in H^2(0,1)$,并且$v(0)=v(1)=0$,(34)式仍然成立,这里v在0,1点的值应理解为迹. 但是$v\in H^2(0,1)$蕴含$v\in H^1(0,1)$,由第一章§1,$\in H_0^1(0,1)$. 总之,上述对v的限制等价于$v\in H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1)$. 于是,弱解的提法是:求$u\in H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1)$,使得当$v\in H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1)$时,(34)式成立. $u''(0)=u''(1)=0$是自然边界条件,而$u(0)=u(1)=0$是强制边界条件.

取$H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1)$的有限维子空间V_h就可以构造(34)的有限元解法. 最简单的取法是$V_h=\{u\in C^1([0,1])$; $u|_{\Omega_i}\in P_3(\Omega_i)(i=1,\cdots,N)$, $u(0)=u(1)=0\}$. 以下的步骤完全类似,不再赘述.

习　题


图 13

1. 将区域Ω剖分为矩形单元（图13），每边与坐标轴平行. 在每个单元上，四个顶点取作节点. 插值函数为

$$u=a_0+a_1x+a_2y+a_3xy.$$

它不是线性的，但是对两个坐标x与y分别是线性的，因此称为是双线性的（参看附录一）. 求证

(a) 参数a_0, a_1, a_2, a_3可以由节点值唯一确定；

(b) 插值函数在整个区域$\bar{\Omega}$上连续.

2. 对于Laplace算子计算双线性单元的刚度矩阵.

3. 对于第一章习题5的问题，用有限元方法求解. 如果取正文中的三角形剖分及线性插值，试写出代数方程组.

4. 对于问题

$$\begin{cases} -\Delta u=f, & (x,y)\in\Omega, \\ u|_{\Gamma_1}=g_1, & \left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_2}=g_2, \end{cases}$$

其中Ω是一个多边形区域，Γ_1和Γ_2分别由$\partial\Omega$的一些线段组成，$\partial\Omega=\overline{\Gamma_1}\cup\overline{\Gamma_2}$，用有限元方法求解，取正文中的三角形剖分及线性插值，试写出代数方程组.

5. 取钢的物理参数$E=2\times10^6\,\mathrm{kg/cm^2}$, $\theta=0.28$, 密度$\rho=7.8\,\mathrm{g/cm^3}$. 对于3.2段中的例子，取$p=100\,\mathrm{kg/cm^2}$. 弹性体的厚度在此处不起作用，为简单起见，可以认为厚1 cm. 利用电子计算机，求出各点的位移与各单元内的应力.

除了上面已经给出的剖分外，还可以考虑如图14的剖分

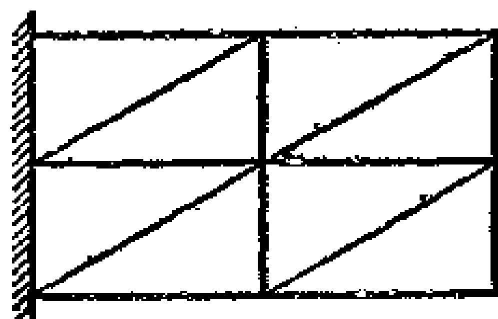


图 14

6. 利用 Lax-Milgram 定理证明问题(32)的弱解的存在唯一性.

7. 证明当$f\in C([0,1])$，$u\in C^4([0,1])$时，问题(34)的弱解是古典解.

第三章 椭圆型边值问题的有限元方法(二)

在这一章，我们讨论第二章给出的有限元方法的误差估计.

§1 抽象误差估计

关于在第一章讨论过的抽象变分问题，有一个与Lax-Milgram定理对应的抽象误差估计，它的证明虽然简单，然而它却是椭圆型有限元方法误差估计的一个基础.

定理1（Céa） 设V为Hilbert空间，V_h为V的线性子空间，$u\in V$与$u_h\in V_h$分别是如下问题的解：

$$a(u,v)=F(v),\qquad \forall v\in V, \tag{1}$$

$$a(u_h,v)=F(v),\qquad \forall v\in V_h. \tag{2}$$

其中双线性泛函a与泛函F满足Lax-Milgram定理的条件，则存在与V_h无关的常数C，使

$$\|u-u_h\|\leqslant C\inf_{v_h\in V_h}\|u-v_h\|. \tag{3}$$

证明 任取$v_h\in V_h$，令$w_h=u_h-v_h$，则$w_h\in V_h$，由(1)(2)得

$$a(u,w_h)=F(w_h),\qquad a(u_h,w_h)=F(w_h).$$

将以上二式相减得

$$a(u-u_h,w_h)=0,$$

即

$$a(u-u_h,u_h-v_h)=0.$$

由第一章的条件(16)

$$a(u-u_h,u-u_h)\geqslant\alpha\|u-u_h\|^2.$$

将以上二式相加得

$$a(u-u_h, u-v_h) \geqslant \alpha \|u-u_h\|^2.$$

由双线性泛函a的有界性，存在常数M，使

$$a(u-u_h, u-v_h) \leqslant M \|u-u_h\| \cdot \|u-v_h\|.$$

令$C=M/\alpha$，则有

$$\|u-u_h\| \leqslant C \|u-v_h\|.$$

但v_h为任意的，取右端的下确界即得(3)式. 证毕.

定理1的意义在于：可以将有限元方法的误差估计问题归结为一个函数逼近问题，并且由有限元方法得到的近似解与空间V_h中的最优逼近具有同阶精度. 下一节的内容就是针对线性三角形单元建立相应的误差估计.

§2 插值函数的误差

和第二章§1一样，我们以平面上的问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & (x,y) \in \Omega, \\ u = 0, & (x,y) \in \partial\Omega \end{cases} \tag{4}$$

为例. 只要$f \in L^2(\Omega)$，在第一章§3中已经证明(4)的弱解$u \in H_0^1(\Omega)$存在且唯一. 如果设想Ω的边界$\partial\Omega$更"好"一些，就可以有$u \in H^2(\Omega)$. 例如按第一章附注3，只要Ω是凸的而且它的边界$\partial\Omega$满足Lipschitz条件就够了，下面我们假定$u \in H^2(\Omega)$.

为了便于讨论，我们仍假设Ω是多边形. 作三角形剖分以后，取第二章§1中的空间V_h. 我们估计(3)式的右端.

按嵌入定理，$H^2(\Omega) \to C(\bar{\Omega})$. 因此在每个节点$A_i$上，$u(A_i)$都有确定的意义. 在每个三角形单元上按$u(A_i)$作线性插值，我们得到一个定义于$\bar{\Omega}$上的连续函数，记作$u_I$，容

易验证$u_I \in V_h$. 因此

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_1 \leqslant \|u - u_I\|_1. \tag{5}$$

又

$$\|u - u_I\|_{1,\Omega}^2 = \sum_{e=1}^{M} \|u - u_I\|_{1,\Omega_e}^2. \tag{6}$$

其中 Ω_e 表示单元, M 为单元的总个数. 我们只需逐项估计(6)式右端.

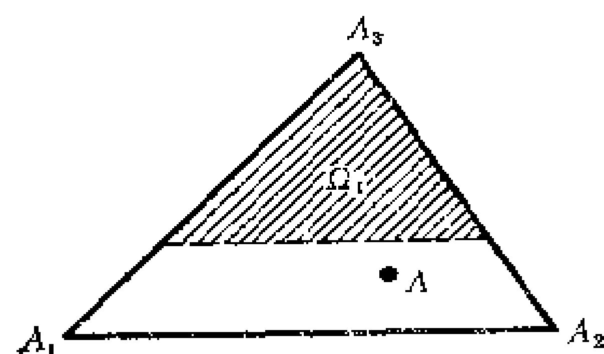


图 15

假设单元 Ω_e 的节点为 $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$(图15). 已知$u \in H^2(\Omega_e)$, 根据 $C^\infty(\bar{\Omega}_e)$ 在 $H^2(\Omega_e)$ 内稠密这一性质, 暂时先假定$u \in C^\infty(\bar{\Omega}_e)$.

任取一点$A(x, y) \in \Omega_e$, 则有

$$u(A_i) = u(A) + \int_0^1 \frac{d}{dt} u(tx_i + (1-t)x,\ ty_i + (1-t)y)\,dt,$$

$$i = 1, 2, 3.$$

作分部积分得

$$u(A_i) = u(A) + \frac{\partial u(A)}{\partial x}(x_i - x) + \frac{\partial u(A)}{\partial y}(y_i - y)$$

$$+ \int_0^1 (1-t) \frac{d^2}{dt^2} u(tx_i + (1-t)x,\ ty_i + (1-t)y)\,dt$$

令 $\quad \xi_i = tx_i + (1-t)x, \quad \eta_i = ty_i + (1-t)y.$

上式又可以写成

$$u(A_i)=u(A)+\frac{\partial u(A)}{\partial x}(x_i-x)$$
$$+\frac{\partial u(A)}{\partial y}(y_i-y)+R_i(A), \tag{7}$$

其中
$$R_i(A)=\int_0^1(1-t)\frac{d^2}{dt^2}u(\xi_i,\eta_i)dt \tag{8}$$

(7),(8)实际上就是带积分型余项的Taylor公式. 以$\lambda_i(A)$表示点A的面积坐标，则有

$$u_1(A)=\sum_{i=1}^{3}u(A_i)\lambda_i(A).$$

由（7）式

$$u_1(A)=\sum_{i=1}^{3}\left\{u(A)+\frac{\partial u(A)}{\partial x}(x_i-x)+\frac{\partial u(A)}{\partial y}(y_i-y)\right.$$
$$\left.+R_i(A)\right\}\lambda_i(A). \tag{9}$$

作一个线性函数l，使

$$l(A)=u(A),$$
$$\frac{\partial l(A)}{\partial x}=\frac{\partial u(A)}{\partial x},\qquad \frac{\partial l(A)}{\partial y}=\frac{\partial u(A)}{\partial y}.$$

l的二阶微商等于零，因此由（9）式

$$l_I(A)=\sum_{i=1}^{3}\left\{u(A)+\frac{\partial u(A)}{\partial x}(x_i-x)+\frac{\partial u(A)}{\partial y}(y_i-y)\right\}$$
$$\times\lambda_i(A).$$

但是线性函数的插值函数等于它自身，因此

$$l_I(A)=l(A)=u(A).$$

由(9)式得

$$u_I(A)-u(A)=\sum_{i=1}^{3}R_i(A)\lambda_i(A). \tag{10}$$

这就是u_I-u的表达式．我们求它的微商

$$\frac{\partial(u_I(A)-u(A))}{\partial x}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}R_i(A)\frac{\partial\lambda_i(A)}{\partial x}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial R_i(A)}{\partial x}\lambda_i(A).$$

将（7）式对x求微商得

$$\frac{\partial^2 u(A)}{\partial x^2}(x_i-x)+\frac{\partial^2 u(A)}{\partial x\partial y}(y_i-y)+\frac{\partial R_i(A)}{\partial x}=0.$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial R_i(A)}{\partial x}\lambda_i(A)$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial^2 u(A)}{\partial x^2}(x_i-x)+\frac{\partial^2 u(A)}{\partial x\partial y}(y_i-y)\right\}\lambda_i(A).$$

作一个线性函数l，使

$$l(A)=0,$$

$$\frac{\partial l(A)}{\partial x}=-\frac{\partial^2 u(A)}{\partial x^2},\qquad \frac{\partial l(A)}{\partial y}=-\frac{\partial^2 u(A)}{\partial x\partial y}.$$

由（9）式得

$$l_I(A)=-\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial^2 u(A)}{\partial x^2}(x_i-x)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 u(A)}{\partial x\partial y}(y_i-y)\right\}\lambda_i(A).$$

但是
$$l_I(A)=l(A)=0$$

因此
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial R_i(A)}{\partial x}\lambda_i(A)=0.$$

即有

$$\frac{\partial(u_I(A)-u(A))}{\partial x}=\sum_{i=1}^{n}R_i(A)\frac{\partial\lambda_i(A)}{\partial x}, \tag{11}$$

同理

$$\frac{\partial(u_I(A)-u(A))}{\partial y}=\sum_{i=1}^{3}R_i(A)\frac{\partial\lambda_i(A)}{\partial y} \tag{12}$$

通过(10),(11),(12)可以估计$\|u_I-u\|_{1,\Omega_e}$. 由(10)式和

$$|\lambda_i(A)|\leqslant 1.$$

我们得

$$\|u_I-u\|_{0,\Omega_e}^2\leqslant\int_{\Omega_e}\left(\sum_{i=1}^{3}|R_i(A)|\right)^2 dxdy$$

$$\leqslant 3\sum_{i=1}^{3}\int_{\Omega_e}R_i^2(A)dxdy.$$

设Ω_e的最大边长为h_e，则

$$|x_i-x|\leqslant h_e,\qquad |y_i-y|\leqslant h_e.$$

由（8）式

$$R_i^2(A)=\left\{\int_0^1(1-t)\left[\frac{\partial^2u(\xi_i,\eta_i)}{\partial\xi_i^2}(x_i-x)^2\right.\right.$$

$$+2\frac{\partial^2u(\xi_i,\eta_i)}{\partial\xi_i\partial\eta_i}(x_i-x)(y_i-y)$$

$$\left.\left.+\frac{\partial^2u(\xi_i,\eta_i)}{\partial\eta_i^2}(y_i-y)^2\right]dt\right\}^2$$

$$\leqslant 4h_e^4\left\{\int_0^1(1-t)\sum_{|\alpha|=2}|\partial^\alpha u(\xi_i,\eta_i)|\,dt\right\}^2.$$

利用Schwarz不等式得

$$R_i^2(A)\leqslant 12h_e^4\int_0^1(1-t)^2\sum_{|\alpha|=2}|\partial^\alpha u(\xi_i,\eta_i)|^2dt.$$

因此

$\|u_I-u\|_{0,\Omega_e}^2$

$$\leqslant 36h_e^4\sum_{i=1}^{3}\sum_{|\alpha|=2}\int_0^1(1-t)^2\int_{\Omega_e}|\partial^\alpha u(\xi_i,\eta_i)|^2dxdydt.$$

以ξ_i,η_i为积分变量，作变量替换，并注意到

$$dx=\frac{d\xi_i}{1-t}, \qquad dy=\frac{d\xi_i}{1-t},$$

得

$$\|u_I-u\|_{0,\Omega_e}^2$$

$$\leqslant 36h_e^4\sum_{i=1}^{3}\sum_{|\alpha|=2}\int_0^1\int_{\Omega_i}|\partial^\alpha u(\xi_i,\eta_i)|^2d\xi_id\eta_idt,$$

其中区域Ω_i为Ω_e的一个子区域．例如图15的阴影部分表示了$i=3$时的Ω_i．因此有

$$\|u_I-u\|_{0,\Omega_e}^2\leqslant 108h_e^4|u|_{2,\Omega_e}^2. \tag{13}$$

因为$C^\infty(\bar{\Omega}_e)$在$H^2(\Omega_e)$内稠密，所以（13）式对任意的$u\in H^2(\Omega_e)$都是成立的．利用（11），（12）式可以估计$|u_I-u|_{1,\Omega_e}^2$．所不同的是我们必须估计$\left|\frac{\partial\lambda_i}{\partial x}\right|$与$\left|\frac{\partial\lambda_i}{\partial y}\right|$的上界．以$g$表示三角形$\Omega_e$的最短高（图16），则有

$$\left|\frac{\partial\lambda_i}{\partial x}\right| \text{ 及 } \left|\frac{\partial\lambda_i}{\partial y}\right|<\frac{1}{g}, \qquad i=1,2,3.$$

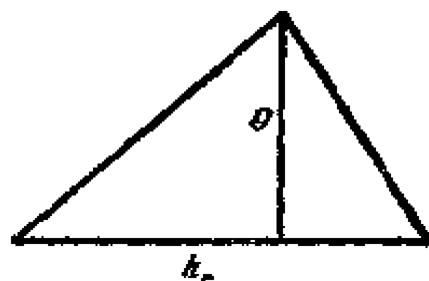


图 16

设所有三角形单元的所有内角的下界是θ_0，由正弦定理，三角形Ω_e的各边长度都不小于$h_e\sin\theta_0$. 因此$g \geqslant h_e \sin^2\theta_0$. 我们得到了估计式

$$|u_I - u|_{1,\Omega_e}^2 \leqslant \frac{216}{\sin^4\theta_0} h_e^2 |u|_{2,\Omega_e}^2 . \qquad (14)$$

令$h = \max h_e$，则由 (5),(6),(13),(14)

$$\inf_{v_h \in V_h} \| u - v_h \|_{1,\Omega} \leqslant Ch |u|_{2,\Omega}, \qquad (15)$$

其中C与θ_0有关而与其它的剖分参数（单元个数，最大边长等）无关. 由定理 1

$$\| u - u_h \|_{1,\Omega} \leqslant Ch |u|_{2,\Omega} . \qquad (16)$$

如果有一族剖分，使$h \to 0$，它们有无穷多个，内角有公共的下界$\theta_0 > 0$，那么这族剖分就称为是正规的. 综上所述，对于正规的一族剖分，当$h \to 0$时

$$\| u - u_h \|_{1,\Omega} = O(h) .$$

从(14)式可以看出，在剖分时我们应该避免过小的内角.

例 $u = x^2 + y^2$.

对于任一三角形单元Ω_e，设它的内接圆为Ω_e'，圆的半径为r_e，则

$$r_e \geqslant \frac{h_e}{2} \tan\frac{\theta_0}{2} .$$

v_h在单元内为线性函数. 因此

$$| u - v_h |_{1,\Omega}^2$$

$$\geqslant \int_{\Omega_e'} \left\{ \left(\frac{\partial(u - v_h)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial(u - v_h)}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy$$

$$= \int_{\Omega_e'} \left\{ (2x - C_1)^2 + (2y - C_2)^2 \right\} dx dy ,$$

其中常数C_1，C_2是v_h的一阶微商．容易计算得

$$\inf_{v_h\in P_1(\Omega_e)}|u-v_h|_{1,\Omega_e}^2$$

$$\geqslant \inf_{C_1,C_2}\int_{\Omega_e'}\{(2x-C_1)^2+(2y-C_2)^2\}dxdy$$

$$=2\pi r_e^4 .$$

同时，Ω_e的测度 $\text{meas}\,\Omega_e\leqslant\frac{3}{2}h_e r_e$．因此

$$|u|_{2,\Omega_e}^2\leqslant 12h_e r_e .$$

即有

$$\inf_{v_h\in P_1(\Omega_e)}|u-v_h|_{1,\Omega_e}^2\geqslant Ch_e^2|u|_{2,\Omega_e}^2 .$$

从以上例子可以看出，(15)式就其对 $h\to 0$ 的阶而言，已经不能再改进了．在这个意义下，我们称（16）式为最优估计．

最后，我们给一个另一种类型的估计．按 Ritz 方法的提法

$$J(u)=\min_{v\in H_0^1(\Omega)}J(v),\quad J(u_h)=\min_{v\in V_h}J(v),$$

其中

$$J(v)=\frac{1}{2}a(v,v)-F(v) .$$

因为V_h是$H_0^1(\Omega)$的子空间，所以

$$J(u_h)\geqslant J(u) .$$

但是u和u_h分别满足(1),(2)式，因此

$$J(u)=-\frac{1}{2}a(u,u),\qquad J(u_h)=-\frac{1}{2}a(u_h,u_h) .$$

我们得到估计

$$a(u_h, u_h) \leqslant a(u, u).$$

对于问题(4)，

$$|u_h|_{1,\Omega} \leqslant |u|_{1,\Omega}. \tag{17}$$

用力学的术语，有限元方法得到的近似解的应变能要小于准确值，这个结论对于实际应用也是有参考价值的.

§3 Aubin-Nitsche技巧

对于线性三角形单元和问题(4)，我们在上一节已经证明了只要$u \in H^2(\Omega)$，就有误差估计$\|u-u_h\|_1 = O(h)$. 从插值函数的误差估计式(13)我们猜想$\|u-u_h\|_0$的收敛阶应该高一些，理想的估计是$O(h^2)$. 要证明这一点，常用的方法是Aubin-Nitsche技巧.

设Ω是凸多边形区域 考虑辅助问题

$$\begin{cases} -\Delta w = u - u_h, & (x,y) \in \Omega, \\ w = 0, & (x,y) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

由第一章§3附注3，$w \in H^2(\Omega)$，且有

$$\|w\|_2 \leqslant C\|u-u_h\|_0. \tag{18}$$

w是如下问题的弱解：

$$a(v, w) = (u-u_h, v), \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

取$v = u - u_h$得

$$a(u-u_h, w) = \|u-u_h\|_0^2.$$

另一方面，对于任意的$w_h \in V_h$，我们有

$$a(u-u_h, w_h) = 0,$$

因此 $$a(u-u_h, w-w_h) = \|u-u_h\|_0^2.$$

由双线性泛函a的有界性

$$\|u-u_h\|_0^2 \leqslant M\|u-u_h\|_1 \cdot \|w-w_h\|_1,$$

但是w_h是任意的，因此

$$\|u-u_h\|_0^2 \leqslant M\|u-u_h\|_1 \cdot \inf_{w_h \in V_h} \|w-w_h\|_1 .$$

由(15)，(18)式

$$\inf_{w_h \in V_h} \|w-w_h\|_1 \leqslant Ch|w|_2 \leqslant Ch\|u-u_h\|_0 .$$

因此

$$\|u-u_h\|_0 \leqslant Ch\|u-u_h\|_1 . \tag{19}$$

以估计式（16）代入即得

$$\|u-u_h\|_0 \leqslant Ch^2|u|_2 . \tag{20}$$

（20）式是一个理想的最优估计.

如果去掉开始时$u \in H^2(\Omega)$的假定，仅假定$u \in H_0^1(\Omega)$，可以由(17)式得

$$|u-u_h|_1 \leqslant 2|u|_1 .$$

然后利用Poincaré-Friedrichs不等式得

$$\|u-u_h\|_1 \leqslant C|u|_1 .$$

代入(19)式即得

$$\|u-u_h\|_0 \leqslant Ch|u|_1 . \tag{21}$$

这是一个对u要求最低的估计.

习　题

1．对于边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u+u=f, & x \in \Omega, \\ u=0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

求证 $$\|u-u_h\|_{1,\Omega}=\inf_{v_h \in V_h} \|u-v_h\|_{1,\Omega} .$$

2．将区间$[a,b]$作剖分$a=x_0<\cdots<x_n=b$，设h为最

大子区间长度. 令$V_h=\{u\in L^2(a,b);\ u|_{(x_{i-1},x_i)}\in P_0(x_{i-1},x_i)(i=1,\cdots,n)\}$,求证对于任意的$u\in H^1(a,b)$

$$\inf_{v_h\in V_h}\|u-v_h\|_0\leqslant h|u|_1 .$$

3. Morley三角形单元的定义为：在三角形的顶点上给函数值. 在各边中点给法向微商值，插值函数为二次多项式（参看附录一）. 求证

（a）插值函数由节点值唯一确定；

（b）$\|u-u_I\|_0\leqslant Ch^3|u|_3$.

4. 如果Ω是多边形区域,只知道(4)的弱解$u\in H_0^1(\Omega)$. 求证对于一族正规的剖分

$$\lim_{h\to 0}\|u-u_h\|_{1,\Omega}=0 .$$

5. 给定一个平面上的四边形，设顶点为$A_i(x_i,y_i)$. 双线性等参数单元的插值函数由以下的参数表示给出.

$$u=u_1(1-\xi)(1-\eta)+u_2\xi(1-\eta)+u_3\xi\eta+u_4(1-\xi)\eta,$$
$$x=x_1(1-\xi)(1-\eta)+x_2\xi(1-\eta)+x_3\xi\eta+x_4(1-\xi)\eta,$$
$$y=y_1(1-\xi)(1-\eta)+y_2\xi(1-\eta)+y_3\xi\eta+y_4(1-\xi)\eta,$$

其中$0\leqslant\xi,\eta\leqslant 1$. 求证

（a）在相邻单元的公共边界上，u是连续的；

（b）线性函数插值后保持不变.

6. 对于第二章问题(32), (33), 求证

（a）当$u\in H^4(0,1)$, $|u-u_I|_m\leqslant Ch^{4-m}|u|_4(m=0,1,2,3)$；

（b）$\|u-u_h\|_2\leqslant Ch^2|u|_4$；

（c）$|u-u_h|_1\leqslant Ch^3|u|_4$.

第四章　混合、杂交、非协调有限元方法

§1　对应于同一边值问题的不同变分问题

有限元方法的基本思想就是将微分方程的边值问题首先化为对应的变分问题，然后进行离散化．但是，同一边值问题可以对应不同的变分问题．在这一节我们讨论将微分方程降阶以后再化为变分问题的方法．

1.1　高阶方程

我们考虑在第二章§5中已经讨论过的问题

$$\begin{cases} \dfrac{d^4 u}{dx^4}=f, \qquad x\in(0,1), \\ u(0)=u'(0)=u(1)=u'(1)=0. \end{cases} \tag{1}$$

引进新的未知函数 $p=-u''$，则(1)化为

$$\begin{cases} p=-u'', \\ p''+f=0, \\ u(0)=u'(0)=u(1)=u'(1)=0. \end{cases} \tag{2}$$

取 $q\in C^\infty([0,1])$，$v\in C_0^\infty(0,1)$，与(2)中的方程分别相乘，在区间(0,1)上积分，并作分部积分得

$$\int_0^1 (pq-q'u')dx=0,$$

$$\int_0^1 p'v'dx=\int_0^1 fv dx.$$

以上表达式对于 $q\in H^1(0,1)$，$v\in H_0^1(0,1)$ 也是成立的，令

$$a(p,q)=\int_0^1 pq\,dx\ ,$$

$$b(q,u)=-\int_0^1 q'u'\,dx\ ,$$

则(2)的弱解提法是：求$p\in H^1(0,1)$，$u\in H_0^1(0,1)$，使

$$\begin{cases}a(p,q)+b(q,u)=0, & \forall q\in H^1(0,1),\\ b(p,v)=-(f,v), & \forall v\in H_0^1(0,1).\end{cases} \tag{3}$$

与第二章§5的变分问题（32）比较．我们已经用空间H^1代替了空间H^2，这对用有限元方法求解是极为方便的．现在，$u(0)=u(1)=0$是强制边界条件，$u'(0)=u'(1)=0$是自然边界条件．可见，对于不同的变分提法，强制边界条件与自然边界条件也是可以互相转变的．

我们也可以引进定义于$H^1(0,1)\times H_0^1(0,1)$上的二次泛函

$$J(q,v)=\frac{1}{2}a(q,q)+b(q,v)+(f,v),$$

$$q\in H^1(0,1),\qquad v\in H_0^1(0,1).$$

设(p,u)为它的一个驻点，则

$$J'(p,u)=0\ .$$

泛函J关于q的偏微分在(p,u)点等于

$$a(p,q)+b(q,u),$$

关于v的偏微分在(p,u)点等于

$$b(p,v)+(f,v),$$

令它们等于零，与(3)式一致．

再考虑问题

$$\begin{cases} \dfrac{d^4 u}{dx^4} = f, & x \in (0,1), \\ u(0) = u''(0) = u(1) = u''(1) = 0 . \end{cases}$$

类似于(3)，可得到它的一个弱解，提法是：求$p \in H_0^1(0,1)$，$u \in H_0^1(0,1)$，使

$$\begin{cases} a(p,q) + b(q,u) = 0, & \forall q \in H_0^1(0,1), \\ b(p,v) = -(f,v), & \forall v \in H_0^1(0,1). \end{cases} \tag{4}$$

这里所有边界条件都是强制边界条件. 同样地，可以证明(p,u)就是泛函$J(q,v)$在空间$H_0^1(0,1) \times H_0^1(0,1)$上的一个驻点.

1.2 二阶方程

我们考虑边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega, \quad (5) \\ u = g, & x \in \partial\Omega. \quad (6) \end{cases}$$

引进新的未知函数$p_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$；则方程(5)化为

$$\begin{cases} p_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}, & i = 1, \cdots, n, \ x \in \Omega, \\ -\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial p_i}{\partial x_i} = f, & x \in \Omega. \end{cases} \tag{7}$$

取$q_i \in C^\infty(\bar{\Omega})$，$v \in C^\infty(\bar{\Omega})$，与(7)中的方程分别相乘，关于指标$i$求和，在区域$\Omega$上积分，并利用Green公式和边界条件(6)得

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} p_i q_i dx + \int_\Omega u \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dx$$

$$= \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{n} q_i g \cos(\nu, x_i) ds;$$

$$\int_{\Omega} v \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_i}{\partial x_i} dx = -\int_{\Omega} f v dx.$$

以上表达式对于$q_i \in H^1(\Omega)$，$v \in L^2(\Omega)$也是成立的．令

$$\boldsymbol{p} = (p_1, \cdots, p_n), \qquad \boldsymbol{q} = (q_1, \cdots, q_n),$$

$$a(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} p_i q_i dx,$$

$$b(\boldsymbol{q}, u) = \int_{\Omega} u \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dx,$$

$$G(\boldsymbol{q}) = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{n} q_i g \cos(\nu, x_i) ds,$$

$$F(v) = -\int_{\Omega} f v dx,$$

则(6),(7)的弱解提法是：求$\boldsymbol{p} \in (H^1(\Omega))^n$，$u \in L^2(\Omega)$，使

$$\begin{cases} a(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) + b(\boldsymbol{q}, u) = G(\boldsymbol{q}), & \forall \boldsymbol{q} \in (H^1(\Omega))^n, \\ b(\boldsymbol{p}, v) = F(v), & \forall v \in L^2(\Omega). \end{cases} \tag{8}$$

这是一个无约束的变分问题，边界条件(6)已经成了自然边界条件．

对于问题(8)，可以引进泛函

$$J(\boldsymbol{q}, v) = \frac{1}{2} a(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}) + b(\boldsymbol{q}, v) - G(\boldsymbol{q}) - F(v), \tag{9}$$

其中$\boldsymbol{q} \in (H^1(\Omega))^n$，$v \in L^2(\Omega)$．问题(8)等价于

$$J'(\boldsymbol{p}, u) = 0. \tag{10}$$

泛函(9)称为与问题(5),(6)对应的Hellinger-Reissner泛函．

定理1 (Hellinger-Reissner原理) 如果$u\in C^2(\bar{\Omega})$是问题(5),(6)的古典解，则$p_i\left(=\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$，$u$是问题(8)的弱解. 反之，如果$f\in C(\bar{\Omega})$，$g\in C(\partial\Omega)$，$p,u$ 是问题(8)的弱解，且$p_i\in C^1(\bar{\Omega})$，则$u\in C^2(\bar{\Omega})$，并且u是问题(5)，(6)的古典解.

证明 我们只需证明定理的后面一半. 由(8)

$$\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial p_i}{\partial x_i}+f\right)v\,dx=0,\qquad\forall v\in L^2(\Omega).$$

因此在$L^2(\Omega)$中

$$\sum_{i=1}^n\frac{\partial p_i}{\partial x_i}+f=0.$$

由于$C(\bar{\Omega})\subset L^2(\Omega)$，上式在$C(\bar{\Omega})$中成立. 任取$q_i\in C_0^\infty(\Omega)$，由(8)得

$$\int_\Omega\left(p_iq_i+u\frac{\partial q_i}{\partial x_i}\right)dx=0.$$

因此作为广义函数$p_i=\frac{\partial u}{\partial x_i}$，由$p_i\in C^1(\bar{\Omega})$推出$u\in C^2(\bar{\Omega})$. 所以方程(7)已在古典意义下满足，且$u$满足方程(5).

任取一点$x_0\in\partial\Omega$，适当取i，使$\cos(\nu,x_i)$在x_0的邻域内不等于零. 取$q_i\in C^\infty(\bar{\Omega})$，并且$\mathrm{supp}\,q_i\cap\partial\Omega$包含在上述邻域内. 由(8)及Green公式，并利用方程(7)得

$$\int_{\partial\Omega}q_i(u-g)\cos(\nu,x_i)\,ds=0.$$

由q_i的任意性，在$\partial\Omega$上$u=g$，证完.

容易看出，对于问题(6),(7)还可以有其它变分提法.

当取$q_i\in C^\infty(\bar{\Omega})$，$v\in C_c^\infty(\Omega)$，以另一种方式使用Green公式，可得

$$\int_\Omega\sum_{i=1}^n p_i q_i dx-\int_\Omega\sum_{i=1}^n q_i\frac{\partial u}{\partial x_i}dx=0,$$

$$\int_\Omega\sum_{i=1}^n p_i\frac{\partial v}{\partial x_i}dx=\int_\Omega fvdx.$$

因此，如果令

$$a(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})=\int_\Omega\sum_{i=1}^n p_i q_i dx,$$

$$b(\boldsymbol{q},u)=-\int_\Omega\sum_{i=1}^n q_i\frac{\partial u}{\partial x_i}dx,$$

(6)，(7)的弱解提法也可以是：求$\boldsymbol{p}\in(L^2(\Omega))^n$以及$u\in H^1(\Omega)$，$u|_{\partial\Omega}=g$，使

$$\begin{cases}a(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})+b(\boldsymbol{q},u)=0, & \forall q\in(L^2(\Omega))^n,\\ b(\boldsymbol{p},v)=-(f,v), & \forall v\in H_0^1(\Omega).\end{cases}\qquad(11)$$

这时(6)是强制边界条件．对于问题(11)，同样可以引进泛函$J(\boldsymbol{q},v)$，并且也可以讨论它与古典边值问题的等价性．此处不再重复．

1.3 对偶变分原理

我们考察泛函(9)．如果令$\operatorname{div}(\boldsymbol{q})=\sum_{i=1}^n\frac{\partial q_i}{\partial x_i}$．那么$\operatorname{div}:(H^1(\Omega))^n\to L^2(\Omega)$是一个有界线性算子，并且值域为$L^2(\Omega)$．事实上，任取$\tilde{f}\in L^2(\Omega)$，作球$\tilde{\Omega}$，使$\tilde{\Omega}\supset\Omega$．将$\tilde{f}$在$\Omega$外延拓为零．考虑如下的边值问题

$$\begin{cases}-\Delta\tilde{u}=\tilde{f}, & x\in\tilde{\Omega},\\ \tilde{u}=0, & x\in\partial\tilde{\Omega}.\end{cases}$$

由第一章§3，存在$\bar{u}\in H_0^1(\bar{\Omega})\cap H^2(\bar{\Omega})$，使

$$\int_{\bar{\Omega}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx=\int_{\bar{\Omega}}\bar{f}v\,dx,\qquad \forall v\in H_0^1(\bar{\Omega}).$$

取$v\in C_0^\infty(\bar{\Omega})$，由广义微商的定义得

$$-\int_{\bar{\Omega}}v\Delta\bar{u}\,dx=\int_{\bar{\Omega}}\bar{f}v\,dx.$$

即

$$-\Delta\bar{u}=\bar{f}.$$

在Ω上令$q_i=-\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_i}$，则$\mathrm{div}(q)=\bar{f}$，令

$$F(q)=\frac{1}{2}a(q,q)-G(q),$$

并且考虑集合

$$S=\{p\in(H^1(\Omega))^n,\quad -\mathrm{div}(p)=f\}.$$

由第一章定理6，问题(10)等价于：求$p\in(H^1(\Omega))^n$，使

$$p\in S,\tag{12}$$

并且p是泛函F在约束(12)之下的驻点，即

$$F'(p)q=0,\qquad \forall q\in(H^1(\Omega))^n\text{ 且 }\mathrm{div}(q)=0.\tag{13}$$

我们证明，p不仅是驻点，而且是最小值点.

定理2（**最小总余能原理**） 如果$u\in C^2(\bar{\Omega})$是问题(5)，(6)的古典解，则$p=(p_i)=\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$是泛函$F$在约束(12)之下的最小值点．反之，如果$f\in C(\bar{\Omega})$，$g\in C(\partial\Omega)$，$p$是泛函$F$在约束(12)之下的最小值点，且$p\in(C^1(\bar{\Omega}))^n$，则存在$u\in C^2(\bar{\Omega})$，使$p_i=\frac{\partial u}{\partial x_i}$，并且$u$是问题(5)，(6)的古典解.

证明 当$u\in C^2(\bar{\Omega})$是古典解，由定理1和第一章定理6，$\boldsymbol{p}$满足(12),(13)，我们证明$\boldsymbol{p}$是最小值点.

任取$\boldsymbol{r}\in S$，则有

$$
\begin{aligned}
&F(\boldsymbol{r})-F(\boldsymbol{p})\\
&=\frac{1}{2}a(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r})-G(\boldsymbol{r})-\frac{1}{2}a(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p})+G(\boldsymbol{p})\\
&=a(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r}-\boldsymbol{p})-G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{p})+\frac{1}{2}a(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{p},\boldsymbol{r}-\boldsymbol{p})\\
&=\frac{1}{2}a(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{p},\boldsymbol{r}-\boldsymbol{p})\geqslant 0
\end{aligned}
$$

反之，设$\boldsymbol{p}\in(C^1(\bar{\Omega}))^n$是最小值点，则由第一章§2，$\boldsymbol{p}$是问题(12),(13)的解. 由第一章定理6，存在$u\in L^2(\Omega)$，使$\boldsymbol{p}$, u是问题(10)的解. 由定理1，$u\in C^2(\bar{\Omega})$. 并且u是问题(5),(6)的古典解. 证完.

通常最小总余能原理称为最小势能原理的对偶变分原理.

1.4 空间$H(\mathrm{div};\ \Omega)$

现在，让我们粗略地观察以上各弱解的存在性. 为确定起见，设区域Ω的边界$\partial\Omega$满足Lipschitz条件，$f\in L^2(\Omega)$. 并且存在$u_0\in H^1(\Omega)$，使$u_0|_{\partial\Omega}=g$.

问题(11)的弱解是存在的，因为已知第一章问题(11)存在弱解$u\in H^1(\Omega)$. 令$p_i=\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$，则$\boldsymbol{p}$, u就是(11)的解.

问题(8)则不然. 设$\boldsymbol{p}$, u是(8)的解，取$\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$. 令$q_j=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_j}$，则有

$$\int_{\Omega} p_i q_i dx + \int_{\Omega} u \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dx = 0 .$$

由广义微商的定义

$$-\int_{\Omega} \frac{\partial p_i}{\partial x_j} \varphi dx + \int_{\Omega} u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} dx = 0 .$$

于是$\partial^{\alpha} u \in L^2(\Omega)(|\alpha| = 2)$，即$u \in H^2(\Omega)$. 但是我们从第一章§3的附注中已经知道，在更强的条件下才能使$u \in H^2(\Omega)$. 即，一般而言问题(8)的解不一定存在.

为了保证有解，我们改变(8)的提法，如果$u \in H^1(\Omega)$是第一章问题(11)的解，则$p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$满足

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f v dx, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

即在广义微商意义下

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_i}{\partial x_i} = -f \in L^2(\Omega).$$

引进空间

$$H(\mathrm{div};\ \Omega) = \left\{ p \in (L^2(\Omega))^n; \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_i}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\},$$

且提出如下的变分问题：求$p \in H(\mathrm{div};\ \Omega)$，$u \in L^2(\Omega)$，使

$$\begin{cases} a(p, q) + b(q, u) = G(q), & \forall q \in H(\mathrm{div};\ \Omega), \\ b(p, v) = F(v), & \forall v \in L^2(\Omega). \end{cases} \tag{14}$$

需要注意的是：当$p \in H(\mathrm{div};\ \Omega)$，$p$在$\partial\Omega$上的迹要重新定义. 可以证明问题(14)的解的存在唯一性. 这需要用到下面将要讲到的Babuška-Brezzi的理论.

根据同样理由，问题(12)，(13)中的空间$(H^1(\Omega))^n$也要改为$H(\mathrm{div};\ \Omega)$.

§2 混合有限元方法

用有限元方法求解变分问题(3),(4),(8),(11)时，未知函数除了u以外，还有p（或p_i）．这样的有限元方法称为混合有限元方法．

上述变分问题的抽象提法是：设X，Y为Hilbert空间，$a(p,q)$是$X\times X$上的有界双线性泛函，$b(q,v)$是$X\times Y$上的有界双线性泛函，$G(q)$是X上的有界线性泛函，$F(v)$是Y上的有界线性泛函．求$p\in X$，$u\in Y$，使

$$\begin{cases} a(p,q)+b(q,u)=G(q), & \forall q\in X \\ b(p,v)=F(v), & \forall v\in Y. \end{cases} \tag{15}$$

它的有限元近似的抽象提法是：取X的有限维子空间X_h，Y的有限维子空间Y_h，求$p_h\in X_h$，$u_h\in Y_h$，使

$$\begin{cases} a(p_h,q)+b(q,u_h)=G(q), & \forall q\in X_h, \\ b(p_h,v)=F(v), & \forall v\in Y_h. \end{cases} \tag{16}$$

在X_h中取一组基$\varphi_1,\cdots,\varphi_N$，在$Y_h$中取一组基$\psi_1,\cdots,\psi_M$．令

$$p_h=\sum_{j=1}^{N}p_j\varphi_j,\qquad q=\sum_{i=1}^{N}q_i\varphi_i,$$

$$u_h=\sum_{m=1}^{M}u_m\psi_m,\qquad v=\sum_{k=1}^{M}v_k\psi_k.$$

代入(16)得

$$\sum_{i,j=1}^{N}p_jq_i\,a(\varphi_j,\varphi_i)+\sum_{i=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}q_iu_mb(\varphi_i,\psi_m)$$

$$=\sum_{i=1}^{N}q_iG(\varphi_i),$$

$$\sum_{k=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} p_j v_k b(\varphi_j, \psi_k) = \sum_{k=1}^{M} v_k F(\psi_k).$$

由q_i, v_k的任意性得

$$\sum_{j=1}^{N} p_j a(\varphi_j, \varphi_i) + \sum_{m=1}^{M} u_m b(\varphi_i, \psi_m) = G(\varphi_i),$$

$$i = 1, \cdots, N,$$

$$\sum_{j=1}^{N} p_j b(\varphi_j, \psi_k) = F(\psi_k), \qquad k = 1, \cdots, M.$$

令

$$a_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i), \qquad b_{im} = b(\varphi_i, \psi_m),$$

$$g_i = G(\varphi_i), \qquad f_k = F(\psi_k),$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1M} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{N1} & \cdots & b_{NM} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_M \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_N \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_M \end{pmatrix},$$

则可以用矩阵形式将以上代数方程组写成

$$\begin{cases} A\boldsymbol{p} + B\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}, \\ B^T \boldsymbol{p} = \boldsymbol{f}. \end{cases} \tag{17}$$

当A是可逆矩阵时

$$\boldsymbol{p} = A^{-1}(\boldsymbol{g} - B\boldsymbol{u}),$$

代入方程（17），消去未知量p得

$$B^T A^{-1} B u = B^T A^{-1} g - f. \tag{18}$$

下面我们对具体问题作一些讨论.

对于问题（3），作剖分$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_L = 1$，取线性插值，令

$$\Omega_i = (x_{i-1}, x_i),$$

$$X_h = \{u \in C([0,1]);\ u|_{\Omega_i} \in P_1(\Omega_i)\ (i = 1, \cdots, L)\},$$

$$Y_h = \{u \in X_h;\ u(0) = u(1) = 0\}.$$

这时$N = L + 1$，$M = L - 1$，φ_i与ψ_i是同样的函数（$i = 0$，L除外）.

对于问题（8），$(H^1(\Omega))^n$的子空间X_h可以这样取：先取$H^1(\Omega)$的有限维子空间V_h，然后令

$$X_h = (V_h)^n.$$

这时X_h既是$(H^1(\Omega))^n$的有限维子空间，也是

$$H(\mathrm{div};\ \Omega)$$

的有限维子空间. $L^2(\Omega)$的子空间Y_h的取法很多，例如可以令Y_h中的函数在每个单元上取一个常数值，即

$$Y_h = \{u \in L^2(\Omega);\ u|_{\Omega_e} \in P_0(\Omega_e)(e = 1, 2, \cdots)\},$$

其中Ω_e表示单元.

以$\varphi_1, \cdots, \varphi_L$表示$V_h$的一组基，则$X_h$中的基函数共$nL$个，它们可以排成如下的$L$行$n$列表：

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \cdots,\ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

矩阵A和B可以写成块状

$$A=\begin{pmatrix} a'_{11}I & \cdots & a'_{1L}I \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{L1}I & \cdots & a'_{LL}I \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1M} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{L1} & \cdots & B_{LM} \end{pmatrix},$$

其中I为n阶单位阵，

$$a'_{ij}=\int_\Omega \varphi_i\varphi_j dx,$$

$$B_{lm}=\begin{pmatrix} \int_\Omega \psi_m \dfrac{\partial\varphi_l}{\partial x_1}dx \\ \vdots \\ \int_\Omega \psi_m \dfrac{\partial\varphi_l}{\partial x_n}dx \end{pmatrix}.$$

对于这个问题，空间X_h，Y_h应该怎样取?这是一个较为复杂的问题，关于它的讨论已经超出了本书的范围.

混合有限元方法的优点是：第一，它可以使方程降阶，适用于高阶方程；第二，它在求出u的同时还求出了p，在力学中，p往往表示应力，它是重要的未知量，如用通常的有限元方法，必须求出u以后，再作一次微分，这样会降低精度；第三，通常的有限元方法的解一般偏小，混合有限元方法则没有这个系统误差.

混合有限元方法的缺点是：第一，方程复杂，引进新变

量以后，代数方程组变得更庞大了；第二，两个空间X_h与Y_h的匹配很不容易，如选用不当，会导致精度降低，甚至不收敛．

§3　基于余能原理的杂交有限元方法

第§3，§4中的变分原理涉及非正整数次Соболев空间，关于它的讨论已经超出了本书的范围．因此在这两节中我们采用不很严格的叙述方法．

杂交有限元方法与通常的有限元方法的一个区别是：通常的有限元方法的变分原理与剖分无关．作剖分只是为了引进有限维子空间．而杂交有限元方法的变分原理与剖分有关．

考虑问题（12），(13)，我们将区域Ω剖分成单元Ω_1，$\Omega_2,\cdots,\Omega_e,\cdots,\Omega_N$，它们不一定是三角形，而可以是边界分块光滑的任何形状的子区域．

现在我们"放松"条件（12），仅要求在每个单元上$\boldsymbol{p}\in H(\mathrm{div};\ \Omega_e)$，并且$-\mathrm{div}(\boldsymbol{p})=f$．我们然后考察对于$\boldsymbol{p}$还应该加什么补充条件，才能使$\boldsymbol{p}\in H(\mathrm{div};\ \Omega)$　而且在区域Ω上满足$-\mathrm{div}(\boldsymbol{p})=f$．

设有两个相邻单元，不妨设它们是Ω_1与Ω_2，公共边界是S，记$\Omega'=\Omega_1\cup\Omega_2\cup S$，令$v=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial p_i}{\partial x_i}$，则$v$定义于$\Omega_1\cup\Omega_2$．

任取$\varphi\in C_0^\infty(\Omega')$，由Green公式得

$$\int_{\Omega'} v\varphi dx$$

$$=-\int_{\Omega'}\sum_{i=1}^{n}p_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx+\int_S\sum_{i=1}^{n}[p_i]\varphi\cos(\nu,x_i)ds,$$

其中ν表示Ω_1的外法向，$[p_i]$表示函数p_i在S上的跃度，即

$$[p_i]=\lim_{\substack{\zeta\to x\\ \zeta\in\Omega_1}} p_i(\zeta)-\lim_{\substack{\zeta\to x\\ \zeta\in\Omega_2}} p_i(\zeta) .$$

因此

$$\int_{\Omega'} v\varphi dx=-\int_{\Omega'}\sum_{i=1}^{n} p_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx$$

的充分必要条件是

$$\sum_{i=1}^{n}[p_i]\cos(\nu、x_i)=0 \tag{19}$$

在S上几乎处处成立.

将（19）式看作约束，在各单元的边界引进v作为Lagrange乘子，我们就可以将问题（12），（13）化为如下的等价问题：在约束

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial q_i}{\partial x_i}+f=0\,,\qquad x\in\Omega_e\,,\qquad e=1\,,\cdots,M\,, \tag{20}$$

$$v=g\,,\qquad x\in\partial\Omega \tag{21}$$

之下求泛函

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{q},v)$$

$$=\sum_{e=1}^{M}\left\{\frac{1}{2}\int_{\Omega_e}\sum_{i=1}^{n}q_i^2dx-\int_{\partial\Omega_e}\sum_{i=1}^{n}q_iv\cos(\nu,x_i)ds\right\} \tag{22}$$

的驻点，其中ν表示各单元的外法向.在各单元的边界上的积分中，q_i理解为Ω_e上的函数q_i在$\partial\Omega_e$上的迹．对于问题（5），（6），变分问题（20）—(22）有时称为变形的余能原理.

以（$\boldsymbol{p}$，w）表示上述问题的驻点，我们试看它与原问题的解的关系是什么？为此，我们在泛函（22）中对应于约束（20）再引进一个Lagrange乘子ω，得到一个新的泛函

$$\mathscr{L}_1(\omega, q, v)$$

$$=\sum_{e=1}^{M}\left\{\frac{1}{2}\int_{\Omega_e}\sum_{i=1}^{n} q_i^2 \cdot dx+\int_{\Omega_e}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial q_i}{\partial x_i}+f\right)\omega dx\right.$$

$$\left.-\int_{\partial\Omega_e}\sum_{i=1}^{n} q_i v\cos(\nu, x_i)ds\right\}.$$

这时，约束只剩下了（21）．以（u，p，w）表示驻点，取 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega_e)$，作为 q_i 的增量，则有

$$\int_{\Omega_e} p_i\varphi dx+\int_{\Omega}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}u dx=0,$$

由 φ 的任意性得 $p_i=\frac{\partial u}{\partial x_i}$，再以 φ 作为 ω 的增量得

$$\int_{\Omega_e}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p_i}{\partial x_i}+f\right)\varphi dx=0.$$

由 φ 的任意性得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p_i}{\partial x_i}+f=0.$$

因此在每个单元内 u，p_i 为（7）的解．取 $\varphi\in C^\infty(\bar{\Omega}_e)$ 作为 q_i 的增量，则有

$$\int_{\Omega_e} p_i\varphi dx+\int_{\Omega_e}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}u dx-\int_{\partial\Omega_e}\varphi w\cos(\nu, x_i)ds=0.$$

用Green公式，并利用 $p_i=\frac{\partial u}{\partial x_i}$ 得

$$\int_{\partial\Omega_e}(u-w)\varphi\cos(\nu, x_i)ds=0.$$

取 $i=1$，…，n，并利用 φ 的任意性得

$$u=w, \quad x\in\partial\Omega_e.$$

于是w就是u在单元边界上的值．在$\partial\Omega$上，由(21)，$w=g$.

考虑基于（20）—（22）的有限元方法．在每个单元Ω_e上，设q_i的自由度为N_{ie}，并设基函数为φ_{ije}，则有

$$q_i=\sum_{j=1}^{N_{ie}} q_{ije}\varphi_{ije}, \qquad x\in\Omega_e.$$

要求q_i满足（20），则在每个单元内q的自由度为

$$n_e=\sum_{i=1}^{n} N_{ie}-1.$$

在$\bigcup_{e=1}^{M}\partial\Omega_e$上设$v$的自由度为$L$，基函数为$\psi_l$，则有

$$v=\sum_{l=1}^{L} v_l\psi_l.$$

要求v满足（21）．这样就可以将以上变分问题化成形如(17)的代数方程组．读者可以自己把它写出来．我们只指出一点：矩阵A可以表成对角形

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & A_e & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A_M \end{pmatrix},$$

其中子矩阵A_e是n_e阶的方阵，对应于单元Ω_e．如果每个A_e都可逆，则求A的逆矩阵问题可以化为低阶矩阵的求逆问题．求出A_e的逆矩阵后，由（18）可以消去p．这种性质称为变量p可以在“单元水平”上消去，即在形成总刚度矩阵以前，在形成单元刚度矩阵时即可消去p．这样做使代数方程组

的阶数可以大为降低.

杂交有限元方法的优缺点与混合有限元方法类似，此处不再重复.

§4 基于最小势能原理的杂交有限元方法

考虑问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x\in\Omega, \\ u = 0, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{23}$$

以及泛函

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx - \int_\Omega f u\, dx. \tag{24}$$

在第一章中我们已经定义（23）的弱解是泛函（24）在空间$H_0^1(\Omega)$中的最小值点.

象§3一样将区域Ω作剖分，然后，"放松"条件$u\in H_0^1(\Omega)$，只要求$u\in H^1(\Omega_e)$ $(e=1,\cdots,M)$. 由第一章的习题4，为使$u\in H_0^1(\Omega)$，只要补充规定$u|_{\partial\Omega}=0$和$[u]=0$就够了. 对应于这些条件，引进定义于$\bigcup_{e=1}^{M}\partial\Omega_e$上的Lagrange乘子$\lambda$. 首先，在$\bigcup_{e=1}^{M}\partial\Omega_e$的每一边上确定一个法向$\nu$，按这个方向，规定$u$的值在$\nu$指向的一侧为$u_+$，另一侧为$u_-$，$[u]=u_- - u_+$. 在$\Omega$之外设$u=0$，使$[u]$在每一边上都有意义. 考虑泛函：

$$\mathscr{L}(u,\lambda) = \frac{1}{2}\sum_{e=1}^{M}\int_{\Omega_e}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx - \int_{\cup\partial\Omega_e}\lambda[u]\,ds - \int_\Omega f u\, dx \tag{25}$$

设 (u, λ) 为泛函 (25) 的驻点，且充分光滑，容易看出在每个单元内 u 满足方程

$$-\Delta u = f. \tag{26}$$

任取单元 Ω_e，在 $\partial\Omega_e$ 的各段边界上法向 ν 可能指向外部也可能指向内部. 为确定起见，我们假设 ν 都指向外部. 取 u 的增量 $v \in C^\infty(\overline{\Omega}_e)$，则有

$$\int_{\Omega_e} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_{\partial\Omega_e} \lambda v ds - \int_{\Omega_e} f v dx = 0.$$

利用Green公式得

$$-\int_{\Omega_e} v \Delta u dx + \int_{\partial\Omega_e} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(\nu, x_i) v ds$$

$$-\int_{\partial\Omega_e} \lambda v ds - \int_{\Omega} f v dx = 0.$$

利用方程 (26) 和 v 的任意性，我们得

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(\nu, x_i) = \frac{\partial u}{\partial \nu},$$

即 λ 是 u 在单元边界上沿确定法向的微商.

现在构造对应于 (25) 的有限元方法，在每个单元上令

$$u = \sum_{j=1}^{N_e} u_{je} \varphi_{je},$$

在 $\bigcup_{e=1}^{M} \partial\Omega_e$ 上令

$$\lambda=\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\psi_j,$$

就可以化成形如（17）的代数方程组．

下面讨论一个特殊情形．设Ω为平面上的多边形区域，已经剖分成三角形单元，在每个单元内取u是三个自由度的完全一次多项式

$$u=a+bx+cy.$$

以$l_1, l_2, \cdots, l_N$表示所有三角形的边，在每边上取λ等于一个常数，令

$$W_h=\{u\in L^2(\Omega);\ u|_{\Omega_e}\in P_1(\Omega_e)\quad(e=1,\cdots,M)\}.$$

离散化以后的问题就是：求$u\in W_h$，以及常数$\lambda_1, \cdots, \lambda_N$，使

$$\sum_{e=1}^{M}\int_{\Omega_e}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy-\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\int_{l_j}[v]ds-\int_{\Omega}fvdxdy=0\quad\forall v\in W_h,\tag{27}$$

$$\int_{l_j}[u]ds=0,\quad j=1,\cdots,N.\tag{28}$$

现在

$$u=\sum_{i=1}^{3}u_{ie}\varphi_{ie},\qquad v=\sum_{i=1}^{3}v_{ie}\varphi_{ie},$$

其中 $\varphi_{1e}=1,\quad \varphi_{2e}=x,\quad \varphi_{3e}=y.$

（27）式中的第一项

$$\sum_{e=1}^{M}\int_{\Omega_e}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\sum_{e=1}^{M}\sum_{i,j=1}^{3} a_{ije}u_{je}v_{ie}.$$

其中

$$a_{ije}=\int_{\Omega_e}\left(\frac{\partial\varphi_{je}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{ie}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{je}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{ie}}{\partial y}\right)dxdy.$$

令

$$A_e=\begin{pmatrix} a_{11e} & a_{12e} & a_{13e} \\ a_{21e} & a_{22e} & a_{23e} \\ a_{31e} & a_{32e} & a_{33e} \end{pmatrix},$$

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & A_e & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A_M \end{pmatrix}.$$

$$u=(u_{11},\ u_{21},\ u_{31},\ u_{12},\ u_{22},\ u_{32},\ \cdots)^T,$$

$$\lambda=(\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_N)^T.$$

则方程组 (27),(28) 就可以写成

$$\begin{cases} Au+B\lambda=f, \\ B^T u=0 \end{cases}$$

这里矩阵B与向量f的具体形式就不写了. 容易算得

$$A_e=\text{meas}\,\Omega_e\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

所以A是不可逆的矩阵，不能化为方程组 (18).

可以用如下方法求解，当I_j是内部边界时，方程 (28) 就是

$$\int_{I_j} u_+ ds = \int_{I_j} u_- ds \ . \tag{29}$$

以Q_j表示I_j的中点，则（29）与条件

$$u_+(Q_j) = u_-(Q_j)$$

等价．当I_j在区域边界$\partial\Omega$上，方程（28)就是

$$\int_{I_j} u ds = 0 \ .$$

它的充分必要条件是$u(Q_j) = 0$．因此，如果令

$$V_h = \{u \in L^2(\Omega);\ u|_{\Omega_e} \in P_1(\Omega_e)\ (e = 1, \cdots, M);$$

$$u在Q_j点连续\ (j = 1, \cdots, N);$$

$$当Q_j \in \partial\Omega,\ u\cdot(Q_j) = 0\},$$

则V_h是W_h的子空间，u满足(28)的充分必要条件就是$u \in V_h$．在(27)式中首先取$v \in V_h$，这时第二项等于零，我们得

$$\sum_{e=1} \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy$$

$$= \int_\Omega f v dx dy, \quad \forall v \in V_h \ . \tag{30}$$

形式上，方程（30）与第二章的方程（3）没有区别．但是，实际上它们是不同的，现在V_h不是$H_0^1(\Omega)$的子空间．凡是有限元方法的空间不是原空间的子空间的情形，这种有限元方法就称为是一种非协调有限元方法．我们将在下面几节讨论这种方法．

解出方程（30）中的未知量u以后，将它代入方程（27）就可以求解λ_j．方程组(27)，(28)的解是存在唯一的，我们

将它的证明留作习题.

§5 非协调有限元方法

5.1 二阶方程

我们在上一节已经对问题（23）给了一种非协调有限元方法. 现在，推广为非齐次边界条件，我们重述如下：

考虑问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & (x, y) \in \Omega, \\ u = g, & (x, y) \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{31}$$

象第二章§1一样作三角形剖分，以各边中点作为节点，记作$Q_1, \cdots, Q_N$，三角形单元记作$\Omega_1, \cdots, \Omega_M$. 定义空间

$$V_h = \{u \in L^2(\Omega): u|_{\Omega_e} \in P_1(\Omega_e)(e=1, \cdots, M);$$
$$u\text{在}Q_j\text{点连续}\ (j=1, \cdots, N)\},$$

$$V_{h0} = \{u \in V_h: \text{当}Q_j \in \partial\Omega,\ u(Q_j)=0\}.$$

这样得到的V_h不是$H^1(\Omega)$的子空间. 在第二章§1中定义的双线性泛函$a(u, v)$在V_h上已失去意义，我们用另一种双线性泛函代替它：

$$a_h(u, v) = \sum_{e=1}^{M} \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx\,dy, \tag{32}$$

并且令

$$F(v) = \int_{\Omega} f v\, dx\, dy. \tag{33}$$

然后讨论一个有限元方法的提法：求$u_h \in V_h$，使

$$\begin{cases} a_h(u_h, v) = F(v), & \forall v \in V_{h0}, \\ u_h(Q_j) = g(Q_j), & \forall Q_j \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{34}$$

可以看出，(34)与第二章（6），（7）的唯一不同之处就在于V_h不是$H^1(\Omega)$的子空间．因为，只要V_h是$H^1(\Omega)$的子空间，就有

$$a_h(u,\ v)=a(u,\ v)\ ,\quad \forall u,v\in V_h.$$

（34）称为问题(31)的一个非协调有限元格式．与之对应地，第二章中讨论的有限元格式称为协调有限元格式．

在V_{h0}中令

$$\| u \|_h=\left(\sum_{e=1}^{N}| u |_{1,\Omega_e}^2\right)^{1/2}. \tag{35}$$

容易看出，它是一个半范数．不仅如此，当$\| u \|_h=0$，则$| u |_{1,\Omega_e}^2=0$，故在每个三角形单元上u是一个常数．又因为u在节点上连续，在边界节点上等于零，所以u只能在每个单元上等于零．于是$\| \cdot \|_h$是一个范数．在此范数下，V_{h0}是一个Hilbert空间．由Schwarz不等式得

$$|a_h(u,\ v)|\leqslant \| u \|_h\cdot \| v \|_h,$$

因此a_h是V_{h0}上的有界双线性泛函．

我们证明方程组(34)的解的存在唯一性．设u_h对应了齐次代数方程组的解，则

$$\begin{cases} a_h(u_h,\ v)=0, & \forall v\in V_{h0}, \\ u_h(Q_i)=0, & \forall Q_i\in\partial\Omega. \end{cases}$$

因此$u_h\in V_{h0}$，取$v=u_h$，得$\| u_h \|_h=0$，所以$u_h=0$．方程组（34）有唯一解．

仍以$\lambda_l(l=1,\ 2,\ 3)$表示每个单元上的面积坐标；现在的插值基函数就是$1-2\lambda_l$．象第二章§1一样，可以算出单元刚度矩阵为

$$K^{(e)}=2\,|\,D\,|\,B^TB.$$

由(34)容易导出相应的代数方程组。

5．2　四阶方程

我们考虑问题

$$\begin{cases}\Delta^2 u = f, & (x,\ y)\in\Omega,\\ u=0,\quad \dfrac{\partial u}{\partial \nu}=0, & (x,\ y)\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{36}$$

它的物理背景是弹性薄板的弯曲．我们首先给出它的弱解形式．设$u\in C^4(\bar{\Omega})$，任取$v\in C_0^\infty(\Omega)$，与方程相乘，并在区域Ω上积分得

$$\int_\Omega v\Delta^2 u\,dxdy=\int_\Omega fv\,dxdy.$$

进一步利用Green公式，使式中u的微商最高为二阶．显然，对混合微商处理不同，得出的表达式也不同．按照问题的物理背景，我们作如下处理：

$$\begin{aligned}&\int_\Omega v\Delta^2 u\,dxdy\\
&\quad=\int_\Omega\Big\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(1-\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\\
&\qquad+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big(\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)\Big\}v\,dxdy\\
&\quad=\int_\Omega\Big\{\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2(1-\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\\
&\qquad+\Big(\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\Big\}dxdy\\
&\quad\equiv a(u,\ v)\end{aligned}$$

其中$0\leqslant\theta\leqslant 1/2$，它就是材料的Poisson比。

$C_0^\infty(\Omega)$在$H_0^2(\Omega)$ 中稠密，所有边界条件都是强制边界条件．弱解的提法为：求$u\in H_0^2(\Omega)$，使

$$a(u,\ v)=(f,\ v),\qquad \forall v\in H_0^2(\Omega).$$

$H_0^2(\Omega)$的有限维子空间的构造比较复杂，我们现在考虑非协调有限元方法．对于上一段中的三角形剖分，记三角形的顶点为A_1，…，A_N，各边中点为Q_1，…，Q_L，它们都是节点．作子空间

$$V_h=\Big\{u\in L^2(\Omega)\ ;\ u\,|_{\Omega_e}\in P_2(\Omega_e)\ (e=1,\ \cdots,\ M);$$

$$u\text{在}A_i\text{点连续}\ (i=1,\ \cdots,\ N)\ ;\ \text{当}Q_k\in\Omega,$$

$$\left(\frac{\partial u(Q_k)}{\partial \nu}\right)_+=-\left(\frac{\partial u(Q_k)}{\partial \nu}\right)_-\Big\},$$

其中$\dfrac{\partial}{\partial \nu}$表示外法向微商，与$Q_k$相邻的单元有两个，分别以下标＋与－表示关于这两个单元的外法向微商．这种在三角形顶点上给出插值函数值，在各边中点给出外法向微商的单元称为Morley单元（参看附录一）．令

$$V_{h0}=\Big\{u\in V_h;\ \text{当}A_i\in\partial\Omega,\ u(A_i)=0\ ;$$

$$\text{当}Q_k\in\partial\Omega,\ \frac{\partial u(Q_k)}{\partial \nu}=0\Big\},$$

$$\begin{aligned}
&a_h(u,\ v)\\
&=\sum_{e=1}^{M}\int_{\Omega_e}\Big\{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\\
&\quad+2(1-\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\ \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\\
&\quad+\left(\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\Big\}dxdy,
\end{aligned}$$

就可以给出一个非协调有限元格式：求$u_h \in V_{h0}$，使

$$a_h(u_h, v) = (f, v), \qquad \forall v \in V_{h0}. \tag{37}$$

令 $$\| u \|_h = a_h(u, u)^{1/2}.$$

则由

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(1-\theta)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2$$

$$+\left(\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$=\theta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 + (1-\theta)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2$$

$$+(1-\theta)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 + 2(1-\theta)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2$$

$$\geqslant 0 \tag{38}$$

可知，$\| \cdot \|_h$是一个半范数．此外，当$\| u \|_h = 0$，由(38)式，在每个单元上u是线性函数．对于两个相邻单元，由连续性条件，u及其一阶微商在公共边界上也连续，所以u在Ω上是线性函数．再由边界条件得$u=0$．所以$\| \cdot \|_h$是一个范数．在此范数下，V_{h0}是一个Hilbert空间．

与上一段一样，可以证明方程（37）有唯一解．

从这个例子可以看出，非协调有限元方法比协调有限元方法有更大的灵活性．与此同时，它的收敛性问题比协调有限元方法的收敛性问题复杂得多．我们将在下面两节讨论收敛性问题．

§6　分片检验

在第三章中我们已经证明了，只要当网格参数h趋于零时，插值函数能收敛于解，那末椭圆型方程的协调有限元方

法就一定是收敛的．与此相反，混合、杂交、非协调有限元方法不具有这个性质．有一些单元从表面看来彼此是类似的．然而计算的结果表明，有些收敛，有些却不收敛．

1965年，Tocher和Kapur用Adini矩形单元（参看附录一）作试验，计算弹性薄板的弯曲问题．发现误差在0.3％以内．过了几个月，Bazeley，Cheung，Irons，Zienkiewicz用所谓的Zienkiewicz三角形单元（参看附录一）作试验，计算的也是弹性薄板的弯曲问题，作为比较，还用协调单元求解．发现对常曲率解（即解为二次多项式）用协调有限元方法可以得出精确解，而使用Zienkiewicz单元时，只有当所有三角形单元的三边都平行于三条已知直线时，求出的才是精确解，否则曲率的误差可达20％．

对于充分光滑的解，当将区域剖分得充分细以后，总可以认为每一小片都近似于一个常曲率解．因此，当一个非协调有限元方法对于常曲率解能得到精确解时，可以期望，对于一般的解，它也能够得到较好的近似．于是产生了所谓“分片检验”方法，即对于2m阶方程，当解是m次多项式时，以有限元方法的解是否与精确解相等作为判别准则．

值得注意的是，只要在每个单元上当$u\in P_m(\Omega_e)$，插值函数能满足$u_I=u$，那么协调有限元方法总是可以通过分片检验的．因为这时当$u\in P_m(\Omega)$，在V_h中取u的插值函数作为v_h，由第三章定理1，$\|u-u_h\|_m=0$，即$u_h=u$．

Strang在1972年“证明”了分片检验方法是收敛的充分必要条件．可惜，他的证明是错误的．以后，数学家们给出了一些反例，说明分片检验既不是充分条件也不是必要条件．

有趣的是，分片检验方法对于常用的单元都给出了正确的回答．于是，这个有争议的方法至今仍在流行着．

下面我们举例说明.

例 1 考虑方程

$$-\Delta u=0,$$

并取§5中的三角形单元. 设区域Ω的子区域Ω'由一些单元组成，令

$$a'(u,v)=\sum_{\Omega_e\subset\Omega'}\int_{\Omega_e}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy.$$

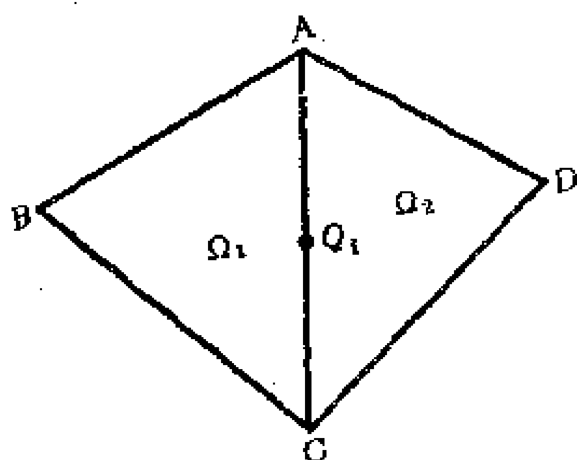


图 17

并且设$u\in P_1(\Omega')$. 我们考察是否u也是有限元方法的解，即

$$a'(u,\varphi_i)=0,\qquad \forall\varphi_i. \tag{39}$$

其中φ_i是与Ω'内部一个节点Q_i对应的基函数.

不妨设节点Q_i的两个相邻单元是Ω_1与Ω_2（图17），则φ_i的支集为$\overline{\Omega_1\cup\Omega_2}$，由Green公式

$$\begin{aligned}a'(u,\varphi_i)&=\int_{\Omega_1\cup\Omega_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\right)dxdy\\&=\int_{\partial\Omega_1}\frac{\partial u}{\partial\nu}\varphi_i ds+\int_{\partial\Omega_2}\frac{\partial u}{\partial\nu}\varphi_i ds,\end{aligned}$$

其中ν分别是关于Ω_1与Ω_2的外法线方向.

对于AC边，以Ω_1一侧为正，Ω_2一侧为负，则有

$$a'(u,\ \varphi_i)=\int_{AB}\frac{\partial u}{\partial \nu}\varphi_i ds+\int_{BC}\frac{\partial u}{\partial \nu}\varphi_i ds$$

$$+\int_{CD}\frac{\partial u}{\partial \nu}\varphi_i ds+\int_{DA}\frac{\partial u}{\partial \nu}\varphi_i ds$$

$$+\int_{AC}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_+(\varphi_i)_++\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_-(\varphi_i)_-\right\}ds.$$

在AB边上，φ_i在中点等于零，且为线性，$\frac{\partial u}{\partial \nu}$为常数，所以积分等于零，在$BC$，$CD$，$DA$边上也一样．在$AC$边上

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_-=-\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_+,$$

因此

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_+(\varphi_i)_++\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_-(\varphi_i)_-$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_+\left\{(\varphi_i)_+-(\varphi_i)_-\right\},$$

它的积分也等于零．于是（39）式成立．上述计算说明这种三角形单元通过了分片检验．

§7　非协调有限元方法的收敛性

定理3（Strang）　设V与V_h为Hilbert空间，$u\in V$，$u_h\in V_h$，u_h是如下问题的解：

$$a_h(u_h,v)=F(v),\qquad \forall v\in V_h,$$

其中F是V_h上的线性泛函，a_h为V_h+V上的双线性泛函．设$\|\cdot\|_h$为V_h+V上的范数，存在常数M与$\alpha>0$，使

$$a_h(u,u)\geqslant \alpha\|u\|_h^2,\qquad \forall u\in V_h,$$

$$a_h(u,v)\leqslant M\|u\|_h\cdot\|v\|_h,\qquad \forall u,v\in V_h+V,$$

则存在只依赖于M，α的常数C，使

$$\|u-u_h\|_h \leqslant C\Big(\inf_{v_h\in V_h}\|u-v_h\|_h + \sup_{\substack{w_h\in V_h\\ w_h\neq 0}}\frac{|a_h(u,w_h)-F(w_h)|}{\|w_h\|_h}\Big). \qquad (40)$$

证明 任取$v_h\in V_h$，则有

$$\begin{aligned}\alpha\|u_h-v_h\|_h^2 &\leqslant a_h(u_h-v_h,u_h-v_h)\\ &= a_h(u-v_h,u_h-v_h)+F(u_h-v_h)-a_h(u,u_h-v_h).\end{aligned}$$

当$\|u_h-v_h\|_h\neq 0$，

$$\begin{aligned}\alpha\|u_h-v_h\|_h &\leqslant M\|u-v_h\|_h+\frac{|a_h(u,u_h-v_h)-F(u_h-v_h)|}{\|u_h-v_h\|_h}\\ &\leqslant M\|u-v_h\|_h+\sup_{\substack{w_h\in V_h\\ w_h\neq 0}}\frac{|a_h(u,w_h)-F(w_h)|}{\|w_h\|_h}.\end{aligned}$$

以上表达式对于$\|u_h-v_h\|_h=0$情形也是成立的．由三角不等式得

$$\begin{aligned}\|u-u_h\|_h &\leqslant \|u-v_h\|_h+\|u_h-v_h\|_h\\ &\leqslant \Big(1+\frac{M}{\alpha}\Big)\|u-v_h\|_h\\ &\quad+\frac{1}{\alpha}\sup_{\substack{w_h\in V_h\\ w_h\neq 0}}\frac{|a_h(u,w_h)-F(w_h)|}{\|w_h\|_h}.\end{aligned}$$

由v_h的任意性，取下确界即得（40）式。证完。

现在考虑问题（31）及有限元格式(34)．为简单起见，设$g=0$，并且设$u\in C^2(\bar{\Omega})$，因此它是古典解．假定剖分是正规的，我们估计（40）式的右端．第一项的估计方法就是第三章§2中插值函数的误差估计，此处从略．比较困难的是第二项的估计．

由（32)，(33）式

$$
\begin{aligned}
&a_h(u,w_h)-F(w_h)\\
&\quad=\sum_{e=1}^{M}\int_{\Omega_e}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial w_h}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial w_h}{\partial y}-fw_h\right)dxdy\\
&\quad=\sum_{e=1}^{M}\int_{\Omega_e}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial w_h}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial w_h}{\partial y}+\Delta u\cdot w_h\right)dxdy\,.
\end{aligned}
$$

由Green公式

$$
a_h(u,w_h)-F(w_h)=\sum_{e=1}^{M}\int_{\partial\Omega_e}\frac{\partial u}{\partial\nu}w_h ds.
$$

以s_{e1},s_{e2},s_{e3}记单元Ω_e的三条边．将上式右端记作I，则有

$$
I=\sum_{e=1}^{M}\ \sum_{j=1}^{3}\int_{s_{ej}}\frac{\partial u}{\partial\nu}w_h ds.
$$

设s_{ej}边的中点为Q_{ej}，则

$$
\sum_{e=1}^{M}\ \sum_{j=1}^{3}\ \int_{s_{ej}}\frac{\partial u}{\partial\nu}w_h(Q_{ej})ds=0.
$$

这是因为，如果Q_{ej}是一个边界点，则$w_h(Q_{ej})=0$．如果Q_{ej}是一个内点，则$\partial u/\partial\nu$在s_{ej}边上对于两个相邻单元反号．由连续性，$w_h(Q_{ej})$对于两个相邻单元是相同的．因此有

$$
I=\sum_{e=1}^{M}\ \sum_{j=1}^{3}\ \int_{s_{ej}}\frac{\partial u}{\partial\nu}(w_h(x,y)-w_h(Q_{ej}))ds.
$$

另一方面，因为w_h是线性函数，Q_{ej}是中点．所以

$$\int_{s_{ej}}(w_h(x,y)-w_h(Q_{ej}))ds=0.$$

于是

$$I=\sum_{e=1}^{M}\sum_{j=1}^{3}\int_{s_{ej}}\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial \nu}-\frac{\partial u(Q_{ej})}{\partial \nu}\right)$$
$$\times(w_h(x,y)-w_h(Q_{ej}))ds.$$

w_h在Ω_e上是线性函数，因此

$$|w_h(x,y)-w_h(Q_{ej})|$$
$$\leqslant\left\{\left(\frac{\partial w_h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w_h}{\partial y}\right)^2\right\}^{1/2}h_e,$$

其中h_e是Ω_e的最大边长. 又因为剖分是正规的，所以存在常数C，使

$$h_e\leqslant C\left(\int_{\Omega_e}dxdy\right)^{1/2}, \qquad (41)$$

即 $\quad |w_h(x,y)-w_h(Q_{ej})|\leqslant C\,|w_h|_{1,\Omega_e}.$

同时

$$\left|\frac{\partial u(x,y)}{\partial \nu}-\frac{\partial u(Q_{ej})}{\partial \nu}\right|\leqslant h_e\sum_{|\alpha|=2}\max_{\bar{\Omega}}|\partial^\alpha u|,$$

因此

$$|I|\leqslant C\sum_{|\alpha|=2}\max_{\bar{\Omega}}|\partial^\alpha u|\sum_{e=1}h_e\,|w_h|_{1,\Omega_e}\sum_{j=1}^{3}\int_{s_{ej}}ds$$
$$\leqslant Ch\sum_{|\alpha|=2}\max_{\bar{\Omega}}|\partial^\alpha u|\sum_{e=1}|w_h|_{1,\Omega_e}h_e.$$

由Cauchy不等式得

$$|I|\leqslant Ch\sum_{|\alpha|=2}\max_{\bar{\Omega}}|\partial^\alpha u|\cdot\|w_h\|_h\left(\sum_{e=1}h_e^2\right)^{1/2}.$$

利用（41）式得

$$|I| \leqslant Ch \sum_{|\alpha|=2} \max_{\bar{\Omega}} |\partial^\alpha u| \cdot \|w_h\|_h .$$

代入（40）式得

$$\|u-u_h\|_h \leqslant Ch \sum_{|\alpha|=2} \max_{\bar{\Omega}} |\partial^\alpha u| .$$

我们的估计还不够精细．以上估计可以改进为

$$\|u-u_h\|_h \leqslant Ch |u|_{2,\Omega} . \tag{42}$$

而且只要求$u \in H^2(\Omega)$．估计式（42）已经与线性插值的协调有限元方法的误差估计一致了．

§8 秩条件与Babuška-Brezzi条件

在混合与杂交有限元方法中，我们经常遇到方程组(17)，其中A为N阶方阵，B为$N \times M$阶矩阵．关于这个方程组的解的存在唯一性，有如下的结论：

引理1 如果（17）有唯一解，则矩阵B的秩

$$\mathrm{rank} B = M \leqslant N . \tag{43}$$

证明 如果（17）有唯一解，则系数矩阵

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}$$

是满秩的．$(B^T, 0)$的行向量线性无关．即有

$$\mathrm{rank} B = \mathrm{rank} B^T = M .$$

同时，由于矩阵B有N行

$$\mathrm{rank} B \leqslant N .$$

证完．

条件（43）常称为秩条件．

引理2 如果（43）式成立，并且A是对称正定矩阵，则（17）有唯一解．

证明 我们只需证明齐次方程只有零解. 设$\boldsymbol{p},\boldsymbol{u}$为齐次方程的解, 则$\boldsymbol{p}^T B=0$, 以$\boldsymbol{p}^T$左乘第一式得

$$\boldsymbol{p}^T A\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}^T B\boldsymbol{u}=0,$$

因此

$$\boldsymbol{p}^T A\boldsymbol{p}=0.$$

由A的正定性, $\boldsymbol{p}=0$. 于是$B\boldsymbol{u}=0$, 由条件(43)可知$\boldsymbol{u}=0$. 证完.

以上两个引理分别给出这一类有限元方法有唯一解的必要条件与充分条件. 但是, 在Hilbert空间上弱解的存在唯一性以及有限元方法的收敛性的条件及证明则要复杂得多. 我们叙述下述定理, 它的证明收入附录二.

考虑问题(15)与(16). 设

$$|a(p,q)|\leqslant M_1\|p\|_X\|q\|_X,$$

$$|b(q,u)|\leqslant M_2\|q\|_X\|u\|_Y.$$

令

$$V_0=\{p\in X;\ b(p,v)=0,\qquad \forall v\in Y\},$$

$$V_{h0}=\{p\in X_h;b(p,v)=0,\qquad \forall v\in Y_h\}.$$

定理4 (Brezzi) 设

(a) 存在常数$\alpha>0$, 使

$$a(p,p)\geqslant\alpha\|p\|_X^2,\qquad \forall p\in V_0.$$

(b) 存在常数$\beta>0$, 使

$$\sup_{\substack{p\in X\\ p\neq 0}}\frac{b(p,v)}{\|p\|_X}\geqslant\beta\|v\|_Y\qquad \forall v\in Y,$$

则问题(15)有唯一解p,u, 满足

$$\|p\|_X+\|u\|_Y\leqslant C(\|G\|_{X'}+\|F\|_{Y'}),$$

其中C只依赖于α, β和M_1, X', Y'分别为X, Y的对偶空间.

此外 设

（c）存在常数$\tilde{a}>0$，使

$$a(p,p)\geqslant\tilde{a}\|p\|_X^2, \qquad \forall p\in V_{h0},$$

（d）存在常数$\tilde{\beta}>0$，使

$$\sup_{\substack{p\in X_h\\ p\neq 0}}\frac{b(p,v)}{\|p\|_X}\geqslant\tilde{\beta}\|v\|_Y, \qquad \forall v\in Y_h,$$

则问题（16）的解满足如下的误差估计：

$$\|p-p_h\|_X+\|u-u_h\|_Y$$
$$\leqslant C\left\{\inf_{q\in X_h}\|p-q\|_X+\inf_{v\in Y_h}\|u-v\|_Y\right\}.$$

其中C只依赖于$\tilde{a}$，$\tilde{\beta}$和M_1，M_2.

附注 当条件（43）成立，方程$B\boldsymbol{u}=0$只有零解．只要$\boldsymbol{u}\neq 0$，就有$B\boldsymbol{u}\neq 0$．因此总存在$\boldsymbol{p}\in R^N$，使

$$\boldsymbol{p}^TB\boldsymbol{u}>0. \tag{44}$$

反之，如果（43）不成立，即$\mathrm{rank}B<M$，方程$B\boldsymbol{u}=0$有非零解$\boldsymbol{u}$，这时对所有的$\boldsymbol{p}\in R^N$，都有$\boldsymbol{p}^TB\boldsymbol{u}=0$，因此(44)式也不成立．总之，(44)与（43）等价．容易看出，(44)就是定理4中的条件（d）．这个条件常称为Babuska-Brezzi条件．但是，从条件（43）得出的条件(d)中，常数$\tilde{\beta}$一般与空间X_h，Y_h有关，即与剖分有关．如果能证明$\tilde{a}$，$\tilde{\beta}$与剖分无关，就可以得到有限元方法的误差估计．

例2 常微分方程的边值问题

$$\begin{cases}-u''=f(x) & x\in(0,1),\\ u(0)=u(1)=0.\end{cases}$$

它的解是

$$u=\int_0^x d\xi\int_0^\xi f(\eta)d\eta-x\int_0^1 d\xi\int_0^\xi f(\eta)d\eta.$$

令$p=u'$，并且令

$$a(p,q)=\int_0^1 pq\,dx,\qquad b(q,u)=\int_0^1 uq'\,dx.$$

则由(8)，弱解的提法如下：求 $p\in H^1(0,1)$，$u\in L^2(0,1)$，使

$$\begin{cases}a(p,q)+b(q,u)=0, & \forall q\in H^1(0,1),\\ b(p,v)=-(f,v), & \forall v\in L^2(0,1).\end{cases}\tag{45}$$

作剖分 $x_i=i/N(i=0,1,\cdots,N)$。令 $\Omega_i=\left(\frac{i-1}{N},\ \frac{i}{N}\right)$，并作空间

$$X_h=\{p\in C([0,1]);\ p|_{\Omega_i}\in P_1(\Omega_i)(i=1,\cdots,N)\},$$
$$Y_h=\{u\in L^2(0,1);\ u|_{\Omega_i}\in P_0(\Omega_i)(i=1,\cdots,N)\},$$

求近似解如下：求 $p_h\in X_h$，$u_h\in Y_h$，使

$$\begin{cases}a(p_h,q)+b(q,u_h)=0, & \forall q\in X_h,\\ b(p_h,v)=-(f,v), & \forall v\in Y_h.\end{cases}\tag{46}$$

直接验证可得 $V_0=V_{h0}=P_0(0,1)$。因此，当 $p\in V_0=V_{h0}$，

$$a(p,p)=\int_0^1 p^2\,dx=\|p\|_0^2=\|p\|_1^2,$$

即定理 4 的条件(a)，(c)皆成立。又令

$$p=\int_0^x v(\xi)\,d\xi,\tag{47}$$

则

$$b(p,v)=\int_0^1 v^2\,dx=\|v\|_0^2.$$

由(47)式和Schwarz不等式

$$\|p\|_0^2=\int_0^1 dx\left(\int_0^x v(\xi)\,d\xi\right)^2\leqslant\|v\|_0^2,$$

又 $p'=v$，所以

$$\|p\|_1^2\leqslant 2\|v\|_0^2,\qquad b(p,v)\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\|v\|_0\|p\|_1.$$

即定理 4 的条件(b)，(d)皆成立．由定理4，问题(45)，(46)皆有唯一解，且有估计

$$\|p-p_h\|_1+\|u-u_h\|_0$$
$$\leqslant C\left\{\inf_{q\in X_h}\|p-q\|_1 + \inf_{v\in Y_h}\|u-v\|_0\right\}.$$

由第三章插值函数的误差估计得

$$\|p-p_h\|_1+\|u-u_h\|_0\leqslant Ch(|p|_2+|u|_1), \tag{48}$$

其中$h=1/N$．(48)式已是最优估计了．例如当$f(x)=-x$，可以求出在Ω_i上，$p'=x$，$p'_h=(i-1/2)/N$，即有

$$\left(\int_0^1(p'-p'_h)^2dx\right)^{1/2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}h.$$

习　　题

1．对于问题(3)，如果$f\in C([0,1])$，解$p\in C^2([0,1])$，求证u是问题(1)的古典解．

2．对于平面应力问题，如果边界条件是$\mathbf{u}|_{\partial\Omega}=0$，则对应的Hellinger-Reissner泛函是

$$J(\varepsilon,\mathbf{u})$$
$$=\frac{1}{2}\int_\Omega(\sigma_x e_x+\sigma_y e_y+\tau_{xy}\gamma_{xy})dxdy$$
$$+\int_\Omega\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+f_x\right)u\,dxdy$$
$$+\int_\Omega\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+f_y\right)v\,dxdy,$$

其中 $\sigma=R\varepsilon$, $(u,v)=\boldsymbol{u}$.

(a) 如果f_x,f_y连续，$\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{u}$充分光滑并且是泛函$J$的驻点，证明它们是古典解，

(b) 你能不能写出对应于混合边界条件

$$\boldsymbol{u}|_{\Gamma_1}=\boldsymbol{u}_0,$$
$$(\sigma_x\cos(\nu,x)+\tau_{xy}\cos(\nu,y))|_{\Gamma_2}=g_x,$$
$$(\tau_{xy}\cos(\nu,x)+\sigma_y\cos(\nu,y))|_{\Gamma_2}=g_y$$

的相应泛函？

3. 证明问题 (27),(28)解的存在唯一性.

4. 对于问题(11)，设$f=0$，取$(L^2(\Omega))^n$的子空间Y_h，使当$q\in Y_h$时

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial q_i}{\partial x_i}=0,\qquad x\in\Omega_e,\ e=1,\cdots,M,$$

取$H_0^1(\Omega)$的子空间X_h，使节点都在单元边界上．验证这样得到的有限元格式与杂交有限元方法一致．

5. 对于泛函(25)，试构造一个有限元格式，使它恰是三角形线性单元的协调有限元格式．

6. 证明Wilson矩形单元对于方程$-\Delta u=0$可以通过分片检验．Wilson矩形是：对单元Ω_e，插值函数为完全的二次多项式，$u\in P_2(\Omega_e)$，并且要求u在四个顶点连续．因此，除节点值以外，在每个单元内还有两个自由度（参看附录一）．

7. 对于问题(5),(6)，设$f=0$．用基于(20)—(22)的杂交有限元方法求解．取矩形单元，以顶点为节点．在每边上作线性插值，在单元内部取q_i为一次多项式．验证这样得到的格式与双线性单元的协调有限元格式一致．

8 对于问题(4)，试构造一个有限元格式，证明弱解

与近似解的存在唯一性，当 $p, u \in H^2(0,1)$，给出误差估计.

第五章 特征值问题

在数学物理中，常常需要解各种微分方程的特征值问题．本章以Laplace算子为例讨论特征值问题的有限元方法．我们只限于讨论协调有限元方法，对于其它有限元方法，可以象第四章一样地处理．

§1 弱解及有限元方法

1.1 弱解提法

考虑问题

$$\begin{cases}-\Delta u=\lambda u, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases} \qquad (1)$$

使问题（1）有非零解u的实数λ称为特征值，相应的非零解u称为特征函数．象以前一样，令

$$a(u,v)=\int_\Omega\sum_{i=1}^n\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx,$$

$$(u,v)=\int_\Omega uvdx.$$

则问题(1)的弱解提法是：求$\lambda\in\boldsymbol{R}$与非零的$u\in H_0^1(\Omega)$，使

$$a(u,v)=\lambda(u,v),\qquad \forall v\in H_0^1(\Omega). \qquad (2)$$

我们总是在实数域中考虑问题，因此也只讨论实的特征值，但是如果引进复值的Соболев空间，利用$a(u,v)$的对称性，容易证明所有的特征值仍是实的．

考虑规范化以后的特征函数，即满足

$$\|u\|_0=1 \tag{3}$$

的特征函数，如果定义泛函

$$F(v,\lambda)=a(v,v)-\lambda((v,v)-1),$$

则（2），（3）等价于$F'(u,\lambda)=0$.如果将λ看成 Lagrange 乘子，(3)看成约束，还可以得到另一个等价的问题：在约束（3）下求泛函$a(v,v)$的驻点u.

泛函

$$R(v)=\frac{a(v,v)}{(v,v)},\qquad \forall v\in H_0^1(\Omega),\ v\neq 0$$

称为Rayleigh商．对于任意的$v\in H_0^1(\Omega)$，$v\neq 0$，令

$$v_1=\frac{v}{\|v\|_0},$$

则
$$R(v)=a(v_1,v_1),\qquad \|v_1\|_0=1.$$

因此，如果不考虑约束(3)，问题（2）与$R(v)$的驻点问题等价．

上述事实也可以直接验证，$R(v)$的Fréchet微分是

$$R'(u)v=2\frac{a(u,v)(u,u)-a(u,u)(u,v)}{(u,u)^2}.$$

如果$R'(u)=0$，令$\lambda=a(u,u)/(u,u)$，则u,λ就是（2）的解；反之，如果u,λ是（2）的解，在（2）中取$v=u$，得$\lambda=a(u,u)/(u,u)$，因此$R'(u)=0$.

1.2 Rayleigh商的最小值

上述Rayleigh商的驻点问题还可以加强为最小值问题．由Poincaré-Friedrichs不等式，在空间$H_0^1(\Omega)$中$|\cdot|_1$是一个与$\|\cdot\|_1$等价的范数，因为$a(u,u)=|u|_1^2$，所以按内积$a(\cdot,\cdot)$，$H_0^1(\Omega)$是一个Hilbert空间.

引理 1 存在$u_1\in H_0^1(\Omega)$，$u_1\neq 0$，使

$$R(u_1)=\min_{\substack{v\in H_0^1(\Omega)\\ v\neq 0}} R(v)=\lambda_1>0, \tag{4}$$

u_1，λ_1是问题(2)的解，且λ_1是所有特征值中最小的一个.

证明 由Poincaré-Friedrichs不等式，$R(v)$有正下界. 以$\lambda_1>0$表示下确界.

作"极小化"序列$\{v_k\}\subset H_0^1(\Omega)$，使$\|v_k\|_0=1$，而且

$$\lim_{k\to\infty} R(v_k)=\lambda_1.$$

由泛函$R(v)$的定义，$|v_k|_1$一致有界，所以$\{v_k\}$是空间$H_0^1(\Omega)$内的弱紧集合. 取一个弱收敛子序列，为简便起见，仍记作$\{v_k\}$，设极限为$u_1\in H_0^1(\Omega)$. 由共鸣定理，范数$|\cdot|_1$是弱下半连续的，即

$$|u_1|_1\leqslant \varliminf_{k\to\infty} |v_k|_1=\lambda_1^{1/2}.$$

另一方面，由嵌入定理，$\{v_k\}$是$L^2(\Omega)$内的紧集合. 取一个在$L^2(\Omega)$内强收敛的子序列，它的极限为u_1，故有

$$\|u_1\|_0=\lim_{k\to\infty}\|v_k\|_0=1.$$

因此
$$R(u_1)=\frac{|u_1|_1^2}{\|u_1\|_0^2}\leqslant\lambda_1.$$

但是λ_1为下确界，所以$R(u_1)=\lambda_1$，即$R(v)$在点u_1达到它的最小值. 从$R'(u_1)=0$可知，u_1，λ_1是问题(2)，(3)的解. 不难看出，任意一个使$R(v)$达到最小值的函数都是特征函数.

还要证明λ_1是最小的特征值. 设λ是任意一个特征值，在（2）中取$v=u$，得$R(u)=\lambda$. 因此$\lambda\geqslant\lambda_1$. 证完.

为了求出其余的特征值与特征函数，我们首先引进特征

值重数的概念．然后证明两个引理．

定义1 问题（2）的特征值λ称为是m重的，如果与λ对应的特征函数和元素0共同构成$H_0^1(\Omega)$的m维子空间．

引理2 设λ为问题（2）的m重特征值，则存在特征函数$u_1, \cdots, u_m$与λ对应，并且

$$a(u_i, u_j)=(u_i, u_j)=0, \quad i \neq j.$$

证明 任取m个互相正交的特征函数$u_1, \cdots, u_m$，就有

$$a(u_i, u_j)=0, \quad i \neq j.$$

由引理1，特征值$\lambda>0$．在（2）中取$u=u_i$，$v=u_j$，则

$$(u_i, u_j)=\frac{1}{\lambda}a(u_i, u_j)=0, \quad i \neq j.$$

证完．

引理3 设λ_1，u_1与λ_2，u_2是（2）的两对特征值与特征函数，并且$\lambda_1 \neq \lambda_2$，则

$$a(u_1, u_2)=(u_1, u_2)=0. \tag{5}$$

证明 由（2）得

$$a(u_1, u_2)=\lambda_1(u_1, u_2), \quad a(u_2, u_1)=\lambda_2(u_2, u_1),$$

由$a(\cdot,\cdot)$与$(\cdot,\cdot)$的对称性，适当作线性组合即得（5）．证完．

我们将m重特征值看成m个特征值，将所有特征值按自小而大的顺序排为$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots$．上述引理启发我们给出以下的归纳法：如果已经求出$\lambda_1, \cdots, \lambda_l$以及与它们对应的特征函数$u_1, \cdots, u_l$，以$E_l$表示由$u_1, \cdots, u_l$张成的子空间，以$E_l^{\perp}$表示$H_0^1(\Omega)$中$E_l$的正交余子空间，则解如下问题：求$u \in E_l^{\perp}$，$u \neq 0$，使

$$R(u)=\min_{\substack{v\in E_l^\perp\\ v\neq 0}} R(v).$$

定理1 对于$l=1,2,\cdots$，存在$u_{l+1}\in E_l^\perp$，$u_{l+1}\neq 0$，使

$$R(u_{l+1})=\min_{\substack{v\in E_l^\perp\\ v\neq 0}} R(v).$$

并且$R(u_{l+1})$是特征值λ_{l+1}，u_{l+1}是对应的特征函数.

证明 记$E_0^\perp=H_0^1(\Omega)$，我们用归纳法证明. 由引理1，对于$l=0$，定理的结论已经成立. 现在设定理的结论对于直到$l-1$都已经成立.

类似于引理1，可以证明存在$\lambda\in \mathbf{R}$，与$u\in E_l^\perp$，$u\neq 0$，使

$$R(u)=\lambda=\min_{\substack{v\in E_l^\perp\\ v\neq 0}} R(v),$$

并且

$$a(u,v)=\lambda(u,v),\qquad \forall v\in E_l^\perp. \tag{6}$$

任取$v\in E_l$，则可以展开为

$$v=\sum_{j=1}^{l} c_j u_j.$$

因为$u_j\in E_l$，$u\in E_l^\perp$，所以$a(u_j,u)=0$. 由方程（2）

$$(u_j,u)=\frac{1}{\lambda_j}a(u_j,u)=0.$$

因此
$$a(u,v)=a\Big(u,\sum_{j=1}^{l}c_ju_j\Big)=0,$$

$$\lambda(u,v)=\lambda\Big(u,\sum_{j=1}^{l}c_ju_j\Big)=0,$$

于是
$$a(u,v)=\lambda(u,v). \tag{7}$$

合并（6），（7）二式得

$$a(u,v)=\lambda(u,v),\qquad \forall v\in H_0^1(\Omega),$$

即λ为特征值，u为与其对应的一个特征函数.

我们还要证明$\lambda=\lambda_{l+1}$. 由归纳法假设

$$\lambda_l=\min_{\substack{v\in E_{l-1}^{\perp}\\ v\neq 0}} R(v),$$

又已知$E_l^{\perp}\subset E_{l-1}^{\perp}$，因此$\lambda\geqslant\lambda_l$. 另一方面，在（2）式中取$\lambda=\lambda_{l+1}$，$u=v=u_{l+1}$，$u_{l+1}$为一个与$\lambda_{l+1}$对应的特征函数，则有$R(u_{l+1})=\lambda_{l+1}$. 由引理2.3，$u_{l+1}\in E_l^{\perp}$，因此$\lambda_{l+1}\geqslant\lambda$. 所以$\lambda=\lambda_{l+1}$. 证完.

以上是一个顺序求解过程. 下面的方法可以使我们只求一个指定的特征值.

1.3 Minmax原理

定理2 设S_l是$H_0^1(\Omega)$的任一个l维子空间，则

$$\lambda_l=\min_{S_l}\max_{\substack{v\in S_l\\ v\neq 0}} R(v). \tag{8}$$

证明 取$S_l=E_l$，则任一$v\in S_l$可以展开成

$$v=\sum_{j=1}^{l} c_j u_j,$$

其中u_j为对应于λ_j的规范化特征函数. 由引理2,3

$$R(v)=\frac{a(v,v)}{(v,v)}=\frac{a\left(\sum_{j=1}^{l} c_j u_j,\ \sum_{j=1}^{l} c_j u_j\right)}{\left(\sum_{j=1}^{l} c_j u_j,\ \sum_{j=1}^{l} c_j u_j\right)}$$

$$=\frac{\sum_{j=1}^{l} c_j^2 a(u_j,u_j)}{\sum_{j=1}^{l} c_j^2(u_j,u_j)}=\frac{\sum_{j=1}^{l}\lambda_j c_j^2}{\sum_{j=1}^{l} c_j^2}\leqslant\lambda_l.$$

另一方面，$R(u_l)=\lambda_l$，所以

$$\max_{\substack{v\in E_l\\ v\neq 0}} R(v)=\lambda_l.$$

为证明（8）式，我们只要证明对任意的l维子空间S_l，

$$\max_{\substack{v\in S_l\\ v\neq 0}} R(v)\geqslant\lambda_l$$

就够了．在S_l内求v^*，使

$$a(v^*,u_j)=0,\quad 1\leqslant j\leqslant l-1.$$

因为S_l为l维，方程只有$l-1$个，所以必有非零解，即存在$v^*\in S_l$，$v^*\neq 0$，并且$v^*\in E_{l-1}^{\perp}$．由定理1

$$\lambda_l=\min_{\substack{v\in E_{l-1}^{\perp}\\ v\neq 0}} R(v),$$

因此$R(v^*)\geqslant\lambda_l$．证完．

1.4 协调有限元方法

取有限维子空间$V_h\subset H_0^1(\Omega)$，考虑如下的近似问题：求$\lambda_h\in \mathbf{R}$，及非零的$u_h\in V_h$，使

$$a(u_h,v)=\lambda_h(u_h,v),\quad \forall v\in V_h. \tag{9}$$

以$\varphi_1,\cdots,\varphi_N$记$V_h$中的一组基，则$u_h$，$v$可以展开为

$$u_h=\sum_{j=1}^{N} u_{hj}\varphi_j,\qquad v=\sum_{i=1}^{N} v_i\varphi_i.$$

将它们代入（9）式得

$$\sum_{j=1}^{N} a(\varphi_j, \varphi_i) u_{hj} = \lambda_h \sum_{j=1}^{N} (\varphi_j, \varphi_i) u_{hj}, \quad i=1,\cdots,N.$$

记$k_{ij}=a(\varphi_j,\varphi_i)$，$K=(k_{ij})$，$K$就是我们在第二章中已经定义过的总刚度矩阵．记$m_{ij}=(\varphi_j,\varphi_i)$，$M=(m_{ij})$，按照它的力学背景，$M$称为总质量矩阵．以上问题就是矩阵束$K-\lambda_h M$的广义特征值问题，对此已经有不少解法了．

设问题（9）的特征值为$\lambda_{h1}\leqslant\lambda_{h2}\leqslant\cdots$，类似于定理2

$$\lambda_{hl}=\min_{S_l}\max_{\substack{v\in S_l\\ v\neq 0}} R(v), \tag{10}$$

其中S_l是V_h的任一个l维子空间．因此

$$\lambda_{hl}\geqslant\lambda_l, \qquad l=1,2,\cdots. \tag{11}$$

（11）式表明：近似特征值永远不小于精确值．

1.5 Neumann问题

考虑特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta u=\lambda u, & x\in\Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}=0, & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{12}$$

假如我们用1.1段中定义过的双线性泛函$a(\cdot,\cdot)$，则它不是空间$H^1(\Omega)$上的内积，为克服这一困难，令$\mu=\lambda+1$，将（12）改写为

$$\begin{cases} -\Delta u+u=\mu u, & x\in\Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}=0, & x\in\partial\Omega. \end{cases}$$

令
$$a(u,v)=\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}+uv\right)dx.$$

可以看出，$a(\cdot,\cdot)$就是$H^1(\Omega)$上的内积，相应的弱解提法为：求$\mu\in\boldsymbol{R}$与非零的$u\in H^1(\Omega)$，使

$$a(u,v)=\mu(u,v),\qquad \forall v\in H^1(\Omega).\tag{13}$$

第一至第四段中的讨论可以完全不变地用于现在的情形.

容易看出，$\mu=1$与$u=1$是一对特征值与特征函数，$\mu=1$是最小的特征值，而且它是单特征值．事实上

$$R(v)=\frac{\|v\|_1^2}{\|v\|_0^2}\geqslant 1,\qquad \forall v\in H^1(\Omega).$$

设u为任一与$\mu=1$对应的特征函数，在（13）式中取$\mu=1$，$v=u$得

$$a(u,u)=(u,u),$$

即$\partial u/\partial x_i=0$，即$u$为常数．所以与$\mu=1$对应的特征函数空间是一维的.

按定义

$$E_1^{\perp}=\{u\in H^1(\Omega);\ a(u,1)=0\},$$

即
$$E_1^{\perp}=\left\{u\in H^1(\Omega);\ \int u\,dx=0\right\}.$$

我们有
$$\min_{\substack{v\in E_1^{\perp}\\ v\neq 0}} R(v)=\mu_2,$$

即
$$|v|_1^2+\|v\|_0^2\geqslant\mu_2\|v\|_0^2,\qquad \forall v\in E_1^{\perp}.$$

但是已知$\mu_2>1$，于是

$$|v|_1^2\geqslant\frac{1}{2}|v|_1^2+\frac{\mu_2-1}{2}\|v\|_0^2,\quad \forall v\in E_1^{\perp}$$

令$\alpha=\min(1/2,\ (\mu_2-1)/2)$，得

$$|v|_1^2\geqslant\alpha\|v\|_1^2,\quad \forall v\in E_1^{\perp}.\tag{14}$$

在第一章§3中，我们曾将$E_1^{\perp}$记作V．由（14）式与Lax-Milgram定理，问题：求$u\in V$，使

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = \int_\Omega f v dx + \int_{\partial\Omega} g v ds, \qquad \forall v \in V$$

有唯一解，这就是我们在第一章 § 3 中关于Neumann问题遗留下来的问题.

§ 2 特征值的误差估计

我们考虑问题（2）与（9），在这一节估计特征值的误差. 首先定义投影算子P. 设给定$u \in H_0^1(\Omega)$，则 $a(u,v)$是空间$H_0^1(\Omega)$上的一个有界线性泛函. 由Lax-Milgram定理，以下问题有唯一解：求$u^* \in V_h$，使

$$a(u^*,v)=a(u,v), \qquad \forall v \in V_h.$$

令$u^*=Pu$，则P是一个有界线性算子. 以$a(\cdot,\cdot)$作为空间$H_0^1(\Omega)$中的内积，则由

$$a(u-Pu,v)=0, \qquad \forall v \in V_h$$

可知，P是正交投影算子，它常称为Ritz投影算子.

引理4 设

$$\sigma = \max_{\substack{u \in E_l \\ \|u\|_0 = 1}} |2(u,u-Pu)-(u-Pu,u-Pu)|, \tag{15}$$

则只要$\sigma < 1$，就有

$$\lambda_{hl} \leqslant \frac{\lambda_l}{1-\sigma}.$$

证明 令$S_l = PE_l$，因为E_l是l维空间，所以S_l的维数不高于l，我们证明在本引理条件下，S_l也是l维的. 设不然，则存在非零元素$u_0 \in E_l$，使$Pu_0 = 0$. 总可以使$\|u_0\|_0 = 1$. 这时

$$\sigma \geqslant |2(u_0, u_0 - Pu_0) - (u_0 - Pu_0, u_0 - Pu_0)|$$
$$= |(u_0, u_0)| = 1,$$

与$\sigma < 1$矛盾.

由（10）

$$\lambda_{hl} \leqslant \max_{\substack{v \in S_l \\ v \neq 0}} R(v) = \max_{\substack{u \in E_l \\ \|u\|_0 = 1}} \frac{a(Pu, Pu)}{(Pu, Pu)}. \tag{16}$$

由Ritz算子的定义

$$\begin{aligned} &a(u, u) \\ &= a(Pu, Pu) + 2a(u - Pu, Pu) + a(u - Pu, u - Pu) \\ &= a(Pu, Pu) + a(u - Pu, u - Pu) \\ &\geqslant a(Pu, Pu). \end{aligned}$$

又由（15）式，当$\|u\|_0 = 1$，

$$\begin{aligned} &(Pu, Pu) \\ &= (u, u) - 2(u, u - Pu) + (u - Pu, u - Pu) \\ &\geqslant 1 - \sigma. \end{aligned}$$

将它们都代入（16）式得

$$\lambda_{hl} \leqslant \max_{\substack{u \in E_l \\ \|u\|_0 = 1}} \frac{a(u, u)}{1 - \sigma} = \frac{\lambda_l}{1 - \sigma}.$$

证完.

现在考虑一个特殊情形. 设Ω是一个平面凸多边形区域，取三角形线性协调单元，并且有一族正规的剖分.

定理3 存在与h，l无关的常数$h_0 > 0$与C，使当$h \leqslant h_0 / \lambda_l^{1/2}$时，就有

$$\lambda_l \leqslant \lambda_{hl} \leqslant \lambda_l + Ch^2 \lambda_l^2. \tag{17}$$

证明 由引理4，主要的问题就是估计σ，取$u \in E_l$，并且$\|u\|_0 = 1$，则u可以展开成

$$u=\sum_{j=1}^{l} c_j u_j,$$

其中u_j是特征函数. 由（2）式

$$a(u_j,v)=\lambda_j(u_j,v),\quad \forall v\in H_0^1(\Omega). \qquad (18)$$

将$\lambda_j u_j$看作方程右端，由第一章(24)式，$u_j\in H^2(\Omega)$. 因此$u\in H^2(\Omega)$，并且

$$\|u\|_2\leqslant C\|\sum_{j=1}^{l} c_j\lambda_j u_j\|_0.$$

由引理2，3，$u_1,u_2,\cdots$在$L^2(\Omega)$中正交，于是

$$\|\sum_{j=1}^{l} c_j\lambda_j u_j\|_0^2=\sum_{j=1}^{l} c_j^2\lambda_j^2\|u_j\|_0^2$$

$$\leqslant\lambda_l^2\sum_{j=1}^{l} c_j^2\|u_j\|_0^2=\lambda_l^2\|\sum_{j=1}^{l} c_j u_j\|_0^2$$

$$=\lambda_l^2\|u\|_0^2=\lambda_l^2.$$

因此 $$\|u\|_2\leqslant C\lambda_l.$$

由第三章的（20）式

$$\|u-Pu\|_0\leqslant Ch^2|u|_2\leqslant Ch^2\lambda_l.$$

于是 $$|(u,u-Pu)|\leqslant Ch^2\lambda_l,$$

$$|(u-Pu,u-Pu)|\leqslant Ch^4\lambda_l^2.$$

由（15）式 $$\sigma\leqslant C(h^2\lambda_l+h^4\lambda_l^2).$$

取$h_0>0$，使$C(h_0^2+h_0^4)<1/2$，则当$h\leqslant h_0/\lambda_l^{1/2}$时，$\sigma<1/2$，这时

$$\sigma\leqslant C(1+h_0^2)h^2\lambda_l.$$

由引理4

$$\lambda_{hl}\leqslant\frac{\lambda_l}{1-\sigma}\leqslant\lambda_l(1+2\sigma),$$

即 $$\lambda_{hl}\leqslant\lambda_l+Ch^2\lambda_l^2.$$

不等式（17）的另一半就是（11）式．证完．

§3 特征函数的误差估计

为简化我们的讨论，这一节不考虑重特征值的情形．设λ_l是一个单特征值（一重），u_l是与λ_l对应的特征函数．以λ_{hl}与u_{hl}分别表示它们的有限元近似．我们总可以使

$$\|u_l\|_0=\|u_{hl}\|_0=1,$$

并且
$$\beta=(Pu_l,u_{hl})\geqslant 0,$$

因为如不是，以适当常数乘以u_l或u_{hl}就可以做到这一点．

定理4 在定理3的假设条件下，存在常数$\bar{h}>0$，使当$h\leqslant\bar{h}$时

$$\|u_l-u_{hl}\|_0\leqslant C_l h^2, \tag{19}$$

其中常数$\bar{h}$，C_l依赖于l，但与h无关．

证明 由三角不等式

$$\begin{aligned}\|u_l-u_{hl}\|_0&\leqslant\|u_l-\beta u_{hl}\|_0+\|(\beta-1)u_{hl}\|_0\\&=\|u_l-\beta u_{hl}\|_0+|1-\beta|\\&=\|u_l-\beta u_{hl}\|_0+|(\|u_l\|_0-\|\beta u_{hl}\|_0)|\\&\leqslant 2\|u_l-\beta u_{hl}\|_0\\&\leqslant 2(\|u_l-Pu_l\|_0+\|Pu_l-\beta u_{hl}\|_0)\end{aligned} \tag{20}$$

我们先估计$\|Pu_l-\beta u_{hl}\|_0$．设空间V_h是N维的，可以在V_h中将Pu_l展开得

$$Pu_l=\sum_{j=1}^{N}(Pu_l,u_{hj})u_{hj},$$

于是
$$Pu_l-\beta u_{hl}=\sum_{j\neq l}(Pu_l,u_{hj})u_{hj}.$$

因此
$$\|Pu_l-\beta u_{hl}\|_0^2=\sum_{j\neq l}(Pu_l,u_{hj})^2. \tag{21}$$

在方程（2）中取$v=u_{hj}$得

$$a(u_l,u_{hj})=\lambda_l(u_l,u_{hj}),$$

在方程（9）中取$v=Pu_l$得

$$a(u_{hj},Pu_l)=\lambda_{hj}(u_{hj},Pu_l).$$

由Ritz投影算子P的定义以及a的对称性

$$a(u_l,u_{hj})=a(Pu_l,u_{hj})=a(u_{hj},Pu_l).$$

因此 $$\lambda_l(u_l,u_{hj})=\lambda_{hj}(Pu_l,u_{hj}),$$

即 $$(\lambda_{hj}-\lambda_l)(Pu_l,u_{hj})=\lambda_l(u_l-Pu_l,u_{hj}).$$

代入（21）式得

$$\|Pu_l-\beta u_{hl}\|_0^2=\sum_{j\neq l}\left(\frac{\lambda_l}{\lambda_{hj}-\lambda_l}\right)^2(u_l-Pu_l,u_{hj})^2. \tag{22}$$

由定理3中关于$\lambda_{h,l-1}$与$\lambda_{h,l+1}$的估计，存在依赖于l的常数$\bar{h}>0$与$\rho>0$，使当$h\leqslant\bar{h}$，$j=l-1$，$l+1$时

$$\left|\frac{\lambda_l}{\lambda_{hj}-\lambda_l}\right|\leqslant\rho. \tag{23}$$

从而对于所有的$j\neq l$，（23）式都是成立的，以（23）式代入（22）式得

$$\begin{aligned}\|Pu_l-\beta u_{hl}\|_0^2&\leqslant\rho^2\sum_{j\neq l}(u_l-Pu_l,u_{hj})^2\\&\leqslant\rho^2\|u_l-Pu_l\|_0^2.\end{aligned} \tag{24}$$

以（24）代入（20）式得

$$\|u_l-u_{hl}\|_0\leqslant2(1+\rho)\|u_l-Pu_l\|_0.$$

由第三章（20）式

$$\|u_l-Pu_l\|_0\leqslant Ch^2|u_l|_2.$$

再利用（18）式与第一章（24）式

$$\|u_l\|_2\leqslant C\lambda_l\|u_l\|_0=C\lambda_l.$$

因此得（19）式．证完．

定理5 在定理4的条件下，当$h\leqslant\bar{h}$时

$$\|u_l-u_{hl}\|_1\leqslant C_l h. \tag{25}$$

证明 由方程（2），（9）

$$\begin{aligned}
a(u_l-u_{hl},u_l-u_{hl})
&=a(u_l,u_l)-2a(u_l,u_{hl})+a(u_{hl},u_{hl})\\
&=\lambda_l-2\lambda_l(u_l,u_{hl})+\lambda_{hl}\\
&=2\lambda_l(u_l,u_l-u_{hl})+\lambda_{hl}-\lambda_l.
\end{aligned}$$

当$h\leqslant\bar{h}$时，由定理3，4，上式右端有上界$C_l h^2$，因此

$$|u_l-u_{hl}|_1\leqslant C_l h.$$

再注意到（19）式即得（25）式．证完．

习　题

1． 对于三角形线性协调单元，试求出它对于问题（9）的单元质量矩阵．

2． 证明对于问题（9），三角形线性协调单元的单元刚度矩阵的秩为2，而单元质量矩阵是满秩的．

3． 对于正方形区域Ω，剖分如图18，试求用有限元方

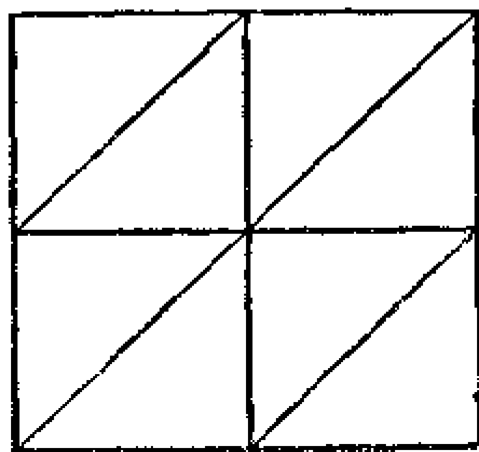


图 18

法得到的问题（1）的近似特征值与特征函数.

4. 设λ_1是问题(1)的最小特征值，证明当$\lambda\in[0,\lambda_1)$时，问题

$$\begin{cases}-\Delta u=\lambda u+f, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}$$

有唯一弱解$u\in H_0^1(\Omega)$. 设$V_h\subset H_0^1(\Omega)$是有限维子空间，则有误差估计

$$\|u-u_h\|_1\leqslant C(\lambda)\inf_{v_h\in V_h}\|u-v_h\|_1,$$

其中$C(\lambda)\leqslant C(\lambda_1-\lambda)^{-1}$.

5. 对于非凸多边形区域Ω，求证对于一族正规的剖分

$$\lim_{h\to 0}\lambda_{hl}=\lambda_l.$$

第六章　发展方程的有限元方法

§1　对空间变量半离散化

我们以热传导方程的初边值问题为例，讨论发展方程的有限元方法，它是：

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f(x,y,t), & (x,y)\in\Omega,\ t\in[0,\infty), \\ u = 0, & (x,y)\in\partial\Omega, t\in[0,\infty), \\ u(x,y,0) = g(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

其中$\partial_t = \partial/\partial t$，象以前一样，令

$$a(u,v) = \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy,$$

$$(u,v) = \int_\Omega uvdxdy.$$

则问题（1）的弱解提法是：求$u:[0,\infty)\to H_0^1(\Omega)$，使

$$\begin{cases} (\partial_t u, v) + a(u,v) = (f,v), & \forall v\in H_0^1(\Omega), \\ u(0) = g. \end{cases} \tag{2}$$

取有限维子空间$V_h\subset H_0^1(\Omega)$，并且设$g_I\in V_h$，以g_I作为g的近似．考虑近似问题：求$u_h:[0,\infty)\to V_h$，使

$$\begin{cases} (\partial_t u_h,\ v) + a(u_h,\ v) = (f,v), & \forall v\in V_h \\ u_h(0) = g_I. \end{cases} \tag{3}$$

以$\varphi_1, \cdots, \varphi_N$记$V_h$中的一组基，则$u_h, v, g_I$可以展开为

$$u_h(t)=\sum_{j=1}^{N} u_j(t)\varphi_j,$$

$$v=\sum_{i=1}^{N} v_i\varphi_i, \qquad g_I=\sum_{i=1}^{N} g_i\varphi_i,$$

代入(3)得

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{N}(\varphi_j,\varphi_i)\,\partial_t u_j+\sum_{j=1}^{N}a(\varphi_j,\varphi_i)u_j=(f,\varphi_i),\\ u_i(0)=g_i, \qquad i=1, \cdots, N.\end{cases} \tag{4}$$

(4)是一个常微分方程组的初值问题．我们可以将它写成矩阵与向量的形式，以K，M记第五章中定义的总刚度矩阵与总质量矩阵．令$\boldsymbol{u}(t)=(u_1(t), \cdots, u_N(t))^T$．$f_i(t)=(f,\varphi_i)$，$\boldsymbol{f}(t)=(f_1(t),\cdots,f_N(t))^T$，$\boldsymbol{g}=(g_1\cdots,g_N)$．(4)可以写成

$$\begin{cases}M\partial_t\boldsymbol{u}+K\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f},\\ \boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{g}.\end{cases}$$

因为M是对称正定的，所以方程组(4)在$t\in[0, \infty)$上有唯一解．

要解出(4)，可以用解析的方法，然而更多的是用数值方法．因为M一般不是对角矩阵，(4)的主部不是分离的．N的数值一般很大，同时(4)往往是刚性方程组，所以求解时有时需要一些特殊的技巧．

下面估计解的误差，象第五章一样，设Ω是一个凸多边形区域，取三角形线性协调单元，并且有一族正规的剖分．设g_I是g的插值函数，并且为了简化我们的讨论，我们设弱解u具有充分的正则性，即在以后出现的各阶微商及其各种

范数都是有界的.

定理1 对于所有的$t\in[0,\infty)$，有以下估计：

$$\|u-u_h\|_{0,\Omega}\leqslant Ch^2\left(\|g\|_{2,\Omega}+\int_0^t\|\partial_\tau u\|_{2,\Omega}d\tau\right). \tag{5}$$

证明 令

$$\rho=u-Pu,\qquad \theta=Pu-u_h,$$

其中P是Ritz投影算子，则

$$u-u_h=\rho+\theta. \tag{6}$$

我们首先估计θ. 在方程（2），（3）中取$v\in V_h$并相减得

$$(\partial_t(u-u_h),v)+a(u-u_h,v)=0.$$

按算子P的定义

$$a(u-u_h,v)=a(Pu-u_h,v)=a(\theta,v).$$

由（6）式得

$$(\partial_t\theta,v)+a(\theta,v)=-(\partial_t\rho,v). \tag{7}$$

取$v=\theta$得

$$(\partial_t\theta,\theta)+a(\theta,\theta)=-(\partial_t\rho,\theta).$$

因此
$$\frac{1}{2}\partial_t\|\theta\|_{0,\Omega}^2\leqslant\|\partial_t\rho\|_{0,\Omega}\cdot\|\theta\|_{0,\Omega}.$$

即
$$\partial_t\|\theta\|_{0,\Omega}\leqslant\|\partial_t\rho\|_{0,\Omega}.$$

积分得

$$\|\theta(t)\|_{0,\Omega}\leqslant\|\theta(0)\|_{0,\Omega}+\int_0^t\|\partial_\tau\rho\|_{0,\Omega}d\tau.$$

由（6）式

$$\|u-u_h\|_{0,\Omega}\leqslant\|\rho\|_{0,\Omega}+\|\theta(0)\|_{0,\Omega}+\int_0^t\|\partial_\tau\rho\|_{0,\Omega}d\tau. \tag{8}$$

我们逐项估计（8）式的右端．由第三章（20）式

$$\|\rho\|_{0,\Omega}=\|u-Pu\|_{0,\Omega}\leqslant Ch^2\|u\|_{2,\Omega}.$$

因为
$$u(t)=g+\int_0^t\partial_\tau u d\tau.$$

所以
$$\|u\|_{2,\Omega}\leqslant\|g\|_{2,\Omega}+\int_0^t\|\partial_\tau u\|_{2,\Omega}d\tau, \tag{9}$$

从而
$$\|\rho\|_{0,\Omega}\leqslant Ch^2(\|g\|_{2,\Omega}+\int_0^t\|\partial_\tau u\|_{2,\Omega}d\tau). \tag{10}$$

由第三章（13),(20)式
$$\begin{aligned}\|\theta(0)\|_{0,\Omega}&\leqslant\|Pg-g\|_{0,\Omega}+\|g-g_I\|_{0,\Omega}\\&\leqslant Ch^2\|g\|_{2,\Omega}.\end{aligned} \tag{11}$$

由第三章（20）式以及算子∂_τ，P的可交换性
$$\begin{aligned}\|\partial_\tau\rho\|_{0,\Omega}&=\|\partial_\tau u-P\partial_\tau u\|_{0,\Omega}\\&\leqslant Ch^2\|\partial_\tau u\|_{2,\Omega}.\end{aligned} \tag{12}$$

以（10)—(12)代入（8）式即得（5）式．证完．

定理2 对于所有的$t\in[0,\infty)$，有以下估计：

$$\|u-u_h\|_{1,\Omega}\leqslant Ch\left\{\|g\|_{2,\Omega}+\int_0^t\|\partial_\tau u\|_{2,\Omega}d\tau+\left(\int_0^t\|\partial_\tau u\|_{1,\Omega}^2d\tau\right)^{1/2}\right\}. \tag{13}$$

证明 在（7）式中取$v=\partial_t\theta$得

$$\begin{aligned}\|\partial_t\theta\|_{0,\Omega}^2+\frac{1}{2}\partial_t a(\theta,\theta)&=-(\partial_t\rho,\partial_t\theta)\\&\leqslant\frac{1}{2}(\|\partial_t\rho\|_{0,\Omega}^2+\|\partial_t\theta\|_{0,\Omega}^2).\end{aligned}$$

因此
$$\partial_t a(\theta,\theta)\leqslant\|\partial_t\rho\|_{0,\Omega}^2,$$

即
$$\partial_t|\theta|_1^2\leqslant\|\partial_t\rho\|_{0,\Omega}^2.$$

积分得

$$|\theta(t)|_{1,\Omega}^2\leqslant|\theta(0)|_{1,\Omega}^2+\int_0^t\|\partial_\tau\rho\|_{0,\Omega}^2d\tau .$$

因此 $$|\theta(t)|_{1,\Omega}\leqslant|\theta(0)|_{1,\Omega}+\left(\int_0^t\|\partial_\tau\rho\|_{0,\Omega}^2d\tau\right)^{1/2}.$$

由（6）式

$$|u-u_h|_{1,\Omega}\leqslant|\rho|_{1,\Omega}+|\theta(0)|_{1,\Omega}+\left(\int_0^t\|\partial_\tau\rho\|_{0,\Omega}^2d\tau\right)^{1/2}. \tag{14}$$

由第三章（16）式

$$|\rho|_{1,\Omega}=|u-Pu|_{1,\Omega}\leqslant Ch\|u\|_{2,\Omega}.$$

以（9）式代入得

$$|\rho|_{1,\Omega}\leqslant Ch\left(\|g\|_{2,\Omega}+\int_0^t\|\partial_\tau u\|_{2,\Omega}d\tau\right). \tag{15}$$

由第三章（14），（16）式

$$\begin{aligned}|\theta(0)|_{1,\Omega}&\leqslant|Pg-g|_{1,\Omega}+|g-g_I|_{1,\Omega}\\&\leqslant Ch\|g\|_{2,\Omega} .\end{aligned} \tag{16}$$

由第三章（21）式以及算子∂_τ、P的可交换性

$$\|\partial_\tau\rho\|_{0,\Omega}=\|\partial_\tau u-P\partial_\tau u\|_{0,\Omega}\leqslant Ch\|\partial_\tau u\|_{1,\Omega} . \tag{17}$$

以（15）—（17）式代入（14）式，并注意到（5）式，即得（13）式，证完。

§2 对时间变量半离散化

与上一节不同，我们在这里首先将方程（2）关于时间变量离散化．从本质上，这一节的讨论方法就是常微分方程的差分方法．例如，我们取隐式Euler格式，设步长为 k，

近似解为$u_k^{(m)}=u_k(x,y,mk)$，令$f^{(m)}=f(x,y,mk)$，则可以用如下问题作为（2）的近似：求$u_k^{(m)}\in H_0^1(\Omega)$，使

$$\begin{cases}\frac{1}{k}(u_k^{(m)}-u_k^{(m-1)},v)+a(u_k^{(m)},v)\\ \quad =(f^{(m)},v), \qquad \forall v\in H_0^1(\Omega),\\ u_k^{(0)}=g .\end{cases} \tag{18}$$

引理1 问题（18）的解是存在唯一的.

证明 我们用归纳法．当$m=0$时，有唯一解$u_k^{(0)}=g$．现在设$u_k^{(m-1)}$为已知，令

$$A(u,v)=a(u,v)+\frac{1}{k}(u,v).$$

则

$$A(u,u)\geqslant\min\left(1,\frac{1}{k}\right)\|u\|_1^2.$$

由Lax-Milgram定理，问题

$$A(u_k^{(m)},v)=\left(f^{(m)}+\frac{1}{k}u_k^{(m-1)},v\right), \quad \forall v\in H_0^1(\Omega)$$

有唯一解．证完．

求（18）的数值解还需要对空间变量作离散化．但是它已是一个椭圆型边值问题，用第二章的方法即可解决．

下面估计解的误差．象上一节一样，我们设弱解u具有充分的正则性．令$u^{(m)}=u(x,y,mk)$，$e^{(m)}=u^{(m)}-u_k^{(m)}$．

定理3 对于$m=0,1,\cdots$，有以下估计

$$\|e^{(m)}\|_0\leqslant 2k\int_0^{mk}\|\partial_{\tau\tau}^2 u\|_{0,\Omega}d\tau. \tag{19}$$

$$|e^{(m)}|_1\leqslant\frac{k}{\sqrt{2}}\left(\int_0^{mk}\left\|\partial_{\tau\tau}^2 u\right\|_{0,\Omega}^2 d\tau\right)^{1/2}. \tag{20}$$

证明 令

$$\omega^{(m)}=\frac{1}{k}\int_{(m-1)k}^{mk}(\tau-(m-1)k)\partial_{\tau}^{2}u\,d\tau. \tag{21}$$

则 $$\partial_t u^{(m)}=\frac{1}{k}\left(u^{(m)}-u^{(m-1)}\right)+\omega^{(m)}.$$

代入（2）式得

$$\frac{1}{k}(u^{(m)}-u^{(m-1)},v)+a(u^{(m)},v)=(f^{(m)}-\omega^{(m)},v).$$

与（18）式相减得

$$\frac{1}{k}(e^{(m)}-e^{(m-1)},v)+a(e^{(m)},v)=-(\omega^{(m)},v). \tag{22}$$

取 $v=e^{(m)}$ 得

$$\frac{1}{k}\|e^{(m)}\|_0^2-\frac{1}{k}(e^{(m-1)},e^{(m)})\leqslant-(\omega^{(m)},e^{(m)}).$$

以不等式

$$|(e^{(m-1)},e^{(m)})|\leqslant\frac{1}{2}\left(\|e^{(m-1)}\|_0^2+\|e^{(m)}\|_0^2\right),$$

$$|(\omega^{(m)},e^{(m)})|\leqslant\|\omega^{(m)}\|_0\cdot\|e^{(m)}\|_0$$

代入即得

$$\|e^{(m)}\|_0^2-\|e^{(m-1)}\|_0^2\leqslant 2k\|\omega^{(m)}\|_0\cdot\|e^{(m)}\|_0,$$

因此

$$\|e^{(m)}\|_0-\|e^{(m-1)}\|_0\leqslant 2k\|\omega^{(m)}\|_0. \tag{23}$$

由（21）式

$$\|\omega^{(m)}\|_0\leqslant\int_{(m-1)k}^{mk}\|\partial_{\tau}^{2}u\|_{0,\Omega}d\tau. \tag{24}$$

将（23）式关于m求和，并注意到$\varepsilon^{(0)}=0$，就得到(19)式.

再在（22）式中取$v=\varepsilon^{(m)}-\varepsilon^{(m-1)}$，得

$$\frac{1}{k}\|\varepsilon^{(m)}-\varepsilon^{(m-1)}\|_0^2+a\left(\varepsilon^{(m)},\ \varepsilon^{(m)}-\varepsilon^{(m-1)}\right)$$

$$=-\left(\omega^{(m)},\ \varepsilon^{(m)}-\varepsilon^{(m-1)}\right).$$

以不等式

$$|a(\varepsilon^{(m)},\varepsilon^{(m-1)})|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon^{(m)},\ \varepsilon^{(m)})\ ++\frac{1}{2}a\left(\varepsilon^{(m-1)},\ \varepsilon^{(m-1)}\right),$$

$$|(\omega^{(m)},\ \varepsilon^{(m)}-\varepsilon^{(m-1)})|$$

$$\leqslant\frac{k}{4}\|\omega^{(m)}\|_0^2+\frac{1}{k}\|\varepsilon^{(m)}-\varepsilon^{(m-1)}\|_0^2$$

代入即得

$$\frac{1}{2}\left(a\left(\varepsilon^{(m)},\ \varepsilon^{(m)}\right)-a(\varepsilon^{(m-1)},\ \varepsilon^{(m-1)})\right)$$

$$\leqslant\frac{k}{4}\|\omega^{(m)}\|_0^2,$$

即
$$|\varepsilon^{(m)}|_1^2-|\varepsilon^{(m-1)}|_1^2\leqslant\frac{k}{2}\|\omega^{(m)}\|_0^2. \qquad (25)$$

由（24）式及Schwarz不等式

$$\|\omega^{(m)}\|_0^2\leqslant\left(\int_{(m-1)k}^{mk}\|\partial_\tau^2 u\|_{0,\Omega}d\tau\right)^2$$

$$\leqslant k\int_{(m-1)k}^{mk}\|\partial_\tau^2 u\|_{0,\Omega}^2 d\tau.$$

将（25）式关于m求和得

$$|\varepsilon^{(m)}|_1^2\leqslant\frac{k^2}{2}\int_0^{mk}\|\partial_\tau^2 u\|_{0,\Omega}^2 d\tau.$$

两端开方即得（20）式．证完．

将方程（2）先对空间变量离散化，然后对时间变量离散化，就得到一个有限元——差分格式，它也称为一个全离散化格式，也可以把次序颠倒过来，先对时间变量离散化，再对空间变量离散化．实际上，结果是相同的．以上两节分别讨论了半离散化以及误差估计．我们将全离散化的误差估计留作习题．

习　题

1．　用隐式Euler格式和有限元方法对问题(2)进行全离散化，给出求解格式．以$u_h^{(m)}$记近似解，求证

$$\|u^{(m)}-u_h^{(m)}\|_0$$

$$\leqslant 2k\int_0^{mk}\|\partial_\tau^2 u\|_{0,\Omega}d\tau+Ch^2\left(\|g\|_{2,\Omega}+\int_0^{mk}\|\partial_\tau u\|_{2,\Omega}d\tau\right).$$

2．　对于波动方程的初边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\\ u|_{x=0}=u|_{x=1}=0,\\ u|_{t=0}=u_0(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=u_1(x),\end{cases}$$

将［0，1］分为两个单元［0，1/2］，［1/2，1］，作线性插值．对空间变量半离散化．用解析方法求所得的常微分方程初值问题的解．

附录一　一些单元的插值公式

§1　三角形单元

对于一个平面上的三角形单元（图19），引进面积坐标λ_1，λ_2，λ_3．下面给出不同的插值公式并说明它们的特点．首先给出Lagrange型插值，即插值多项式的值在节点为已知，不考虑节点上的微商值．

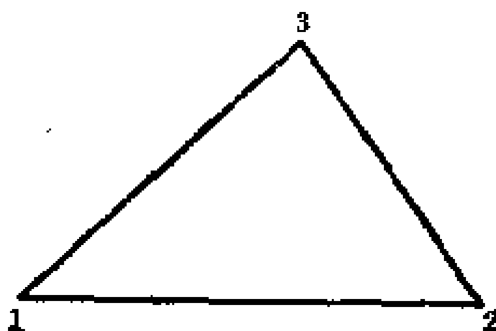


图　19

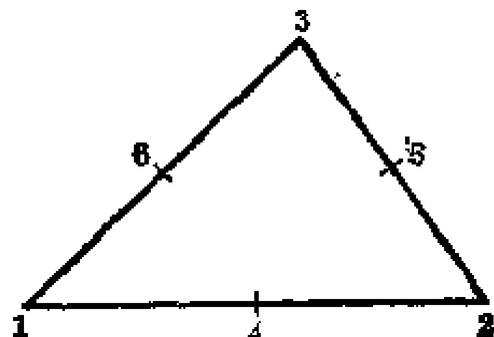


图　20

1.1　线性插值

这种单元又称Courant三角形，节点就是顶点A_i（$i=1，2，3$）．插值多项式是

$$p_1(x,\ y)=a_{00}+a_{10}x+a_{01}y. \tag{1}$$

三个系数可以由三个节点上的函数值唯一决定．基函数之一是λ_1，然后用下标2，3代换1，即得其余两个基函数．误差估计是

$$|u-u_I|_m\leqslant Ch^{2-m}|u|_2,\qquad m=0，1，2， \tag{2}$$

其中各半范数均在一个单元上考虑，h为最大边长．

1.2　二次插值

合并中点A_4,A_5,A_6与A_1,A_2,A_3,共六个节点(图20).
插值多项式是

$$p_2(x,y)=\sum_{0\leqslant\alpha+\beta\leqslant 2} a_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta, \qquad (3)$$

共六个系数. 基函数是$\lambda_1(2\lambda_1-1)$和$4\lambda_1\lambda_2$,然后将下标按图21的顺序置换得到另外四个基函数. 误差估计是

$$|u-u_I|_m\leqslant Ch^{3-m}|u|_3, \quad 0\leqslant m\leqslant 3. \qquad (4)$$

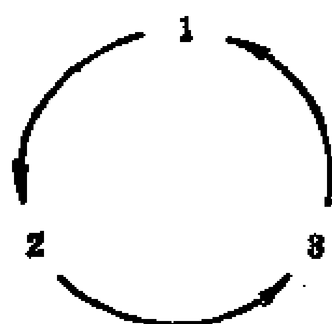


图 21

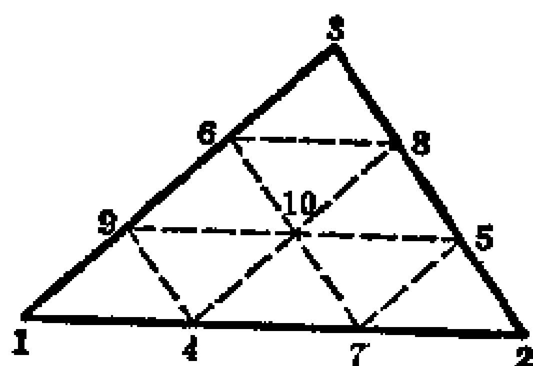


图 22

1.3 三次插值

将各边三等分, 从分点作各边的平行线, 共得10个节点(图22). 插值多项式是

$$p_3(x,y)=\sum_{0\leqslant\alpha+\beta\leqslant 3} a_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta. \qquad (5)$$

共10个系数. 基函数是$\lambda_1(3\lambda_1-1)(3\lambda_1-2)/2$, $\lambda_1\lambda_2(3\lambda_1-1)9/2$, $\lambda_1\lambda_3(3\lambda_1-1)9/2$, 然后将下标按图21的顺序置换得到另外六个基函数,最后一个基函数是$27\lambda_1\lambda_2\lambda_3$. 误差估计是

$$|u-u_I|_m\leqslant Ch^{4-m}|u|_4, \quad 0\leqslant m\leqslant 4. \qquad (6)$$

1.4 不连续线性插值

这种单元又称Crouzeix-Raviart三角形, 取各边中点为节点, 插值多项式是(1). 基函数之一是$1-2\lambda_1$,

然后用下标 2，3 置换．误差估计是（2）．

下面我们给出Hermite型插值，即在某些节点上要求插值多项式的微商为已知．

1.5 Morley三角形

节点为A_i（$1\leqslant i\leqslant 6$）．在节点A_1，A_2，A_3上给定函数值，在节点A_4，A_5，A_6上给定插值函数的法向微商．插值多项式是（3），误差估计是（4）．以D表示单元面积的二倍，l_i表示顶点A_i的对边长度（$i=1，2，3$）．令

$$\xi_1=x_2-x_3,\qquad \xi_2=x_3-x_1,\qquad \xi_3=x_1-x_2,$$
$$\eta_1=y_2-y_3,\qquad \eta_2=y_3-y_1,\qquad \eta_3=y_1-y_2,$$
$$s_{ij}=-(\xi_i\xi_j+\eta_i\eta_j),\qquad i\neq j.$$

则基函数是

$$\lambda_1^2+\left(\frac{s_{12}}{l_2^2}+\frac{s_{31}}{l_3^2}\right)\lambda_2\lambda_3+\frac{s_{12}}{l_2^2}\lambda_1\lambda_2+\frac{s_{31}}{l_3^2}\lambda_3\lambda_1,$$

$$\frac{D}{l_1}\lambda_1(\lambda_1-1),$$

然后将下标按图21的顺序置换得到另外四个基函数．

1.6 Zienkiewicz三角形

节点为A_i（$i=1，2，3$）．在节点上给定函数值以及两个一阶微商．插值多项式如（5），但是已知条件仅有九个．在十个系数之间还需一个限制．这个限制使插值函数包含一切二次多项式．在图22中，设A_i的坐标为(x_i,y_i)，则限制条件是

$$6u_I(A_{10})+\sum_{i=1}^{3}\left\{-2u_I(A_i)+\frac{\partial u_I(A_i)}{\partial x}\right.$$

$$(x_i - x_{i0}) + \frac{\partial u_1(z_i)}{\partial y}(y_i - y_{i0})\Big\} = 0 .$$

在此限制下，插值函数可以由节点上的已知条件唯一确定．基函数是 $\lambda_1^2(3-2\lambda_1)+2\lambda_1\lambda_2\lambda_3$，$\lambda_1^2\lambda_2+\lambda_1\lambda_2\lambda_3/2$，$\lambda_1\lambda_2^2+\lambda_1\lambda_2\lambda_3/2$．然后将下标按图21的顺序置换得到另外六个基函数．误差估计是（4）。

在以上六种单元中，第一、二、三种在每条边上的一维多项式都由节点上的值唯一确定，因此可以保持插值函数在相邻单元的公共边界上的连续性，称为C^0类单元．第四、五种不能保持连续性，只能当作非协调单元使用，但是第四种单元对于一次多项式，第五种单元对于二次多项式，都通过了分片检验，它们分别可以用于二阶方程和四阶方程．第六种单元虽然可以保持连续性，但是不能保持微商的连续性，对于四阶方程，它仍然是非协调单元，可以证明，只有当所有单元的三边分别平行于三条已知直线时，才能通过分片检验．可以构造C^1类单元以及更高阶的插值多项式，还有奇性单元等，插值公式一般较繁．

§2　矩形单元与四边形等参数单元

类似于三角形单元的面积坐标，矩形单元也有一些参数．任取一个单元$\{(x,y);\ x_1\leqslant x\leqslant x_2,\ y_1\leqslant y\leqslant y_2\}$．令$x_0=(x_1+x_2)/2$，$y_0=(y_1+y_2)/2$，则可以作变换

$$\xi=\frac{2}{x_2-x_1}(x-x_0),\qquad \eta=\frac{2}{y_2-y_1}(y-y_0).$$

则矩形单元的象是$\{(\xi,\eta);\ -1\leqslant\xi\leqslant 1,\ -1\leqslant\eta\leqslant 1\}$，它是一个正方形．我们以下以$\xi$，$\eta$作为参数，首先给出Lagrange型插值．

2.1 双线性插值

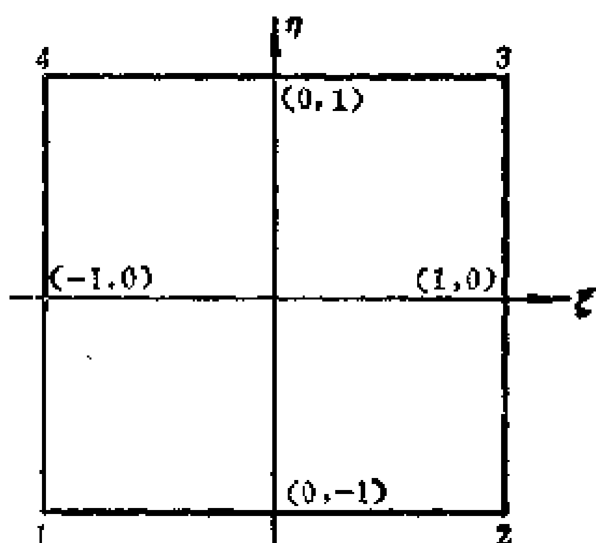


图 23

以四个顶点为节点（图23），插值多项式是

$$q_1(\xi,\eta)=a_{00}+a_{10}\xi+a_{01}\eta+a_{11}\xi\eta. \qquad (7)$$

它对ξ，η分别是线性函数，回到原变量x，y，同样具有双线性性质.

令$(\xi_i,\ \eta_i)$（$1\leqslant i\leqslant 4$）是四个顶点的坐标，则插值基函数是一维多项式的乘积，即

$$(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)/4, \qquad 1\leqslant i\leqslant 4.$$

为了便于表示高次插值，也可以用Lagrange公式表示基函数，令$\xi_1=\eta_1=-1$，$\xi_2=\eta_2=1$，$L(\xi)=(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)$，则基函数是

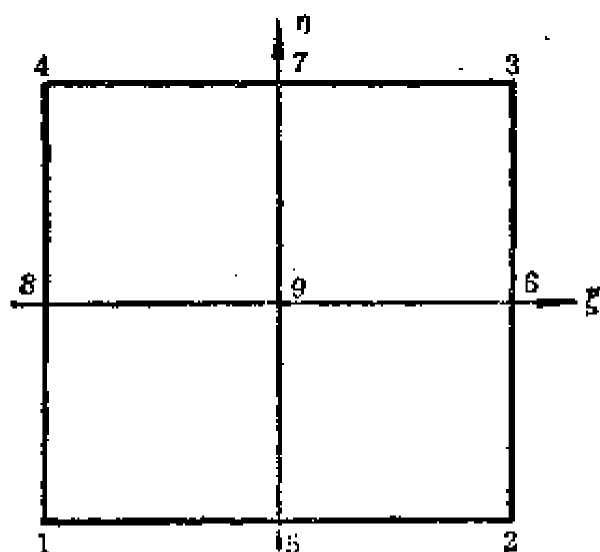


图 24

$$\frac{L(\xi)}{(\xi-\xi_i)L'(\xi_i)}\cdot\frac{L(\eta)}{(\eta-\eta_j)L'(\eta_j)},$$

$$1\leqslant i,\ j\leqslant 2.$$

误差估计是（2）.

2.2 双二次插值

除四个顶点外，还取四边中点和矩形中心点为节点（图24），插值多项式是

$$q_2(\xi,\eta)=\sum_{0\leqslant\alpha,\beta\leqslant 2} a_{\alpha\beta}\xi^\alpha\eta^\beta. \tag{8}$$

共九个系数，节点也是九个.

令$\xi_1=\eta_1=-1$，$\xi_2=\eta_2=0$，$\xi_3=\eta_3=1$，$L(\xi)=(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)(\xi-\xi_3)$ 基函数也是一维插值多项式的乘积，它们是

$$\frac{L(\xi)}{(\xi-\xi_i)L'(\xi_i)}\cdot\frac{L(\eta)}{(\eta-\eta_j)L'(\eta_j)},\quad 1\leqslant i,j\leqslant 3.$$

误差估计是(4).

2.3 不完全双二次插值

将双二次插值单元去掉节点A_9，在插值多项式(8)中去掉最高阶项$a_{22}\xi^2\eta^2$，则得八节点单元. 以$(\xi_i,\eta_i)(1\leqslant i\leqslant 8)$表示各节点的坐标，则基函数是

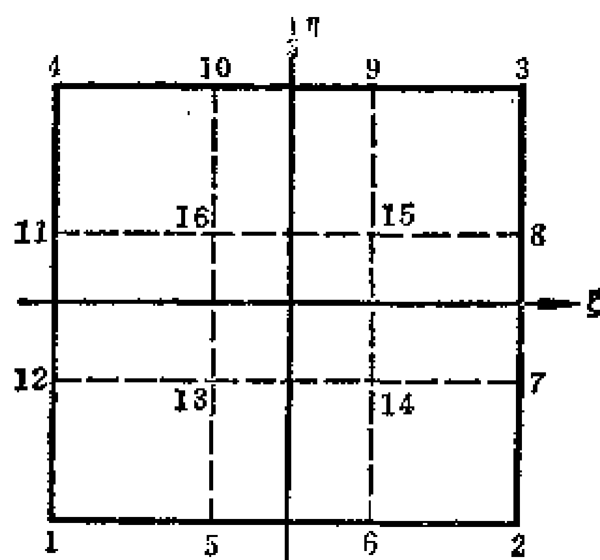


图 25

$$\frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)$$

$$\times(\xi\xi_i+\eta\eta_i-1),\ 1\leqslant i\leqslant 4,$$

$$(1-\xi^2)(1+\eta\eta_i)/2,$$

$$i=5,7,$$

$$(1-\eta^2)(1+\xi\xi_i)/2,$$

$$i=6,8.$$

误差估计仍是(4).

2.4 双三次插值

将(ξ,η)平面上的正方形每边作三等分，作各边的平行线，得一个16节点单元（图25），插值多项式是

$$q_3(\xi,\eta)=\sum_{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant4}a_{\alpha\beta}\xi^{\alpha}\eta^{\beta}. \qquad (9)$$

共16个系数.

令$\xi_1=\eta_1=-1$，$\xi_2=\eta_2=-\frac{1}{3}$，$\xi_3=\eta_3=\frac{1}{3}$，$\xi_4=\eta_4=1$，$L(\xi)=(\xi-\xi_1)\cdots(\xi-\xi_4)$. 基函数也是一维插值多项式的乘积，它们是

$$\frac{L(\xi)}{(\xi-\xi_i)L'(\xi_i)}\cdot\frac{L(\eta)}{(\eta-\eta_j)L'(\eta_j)},\quad 1\leqslant i,\ j\leqslant4.$$

误差估计是(6).

2.5 不完全双三次插值

将双三次插值单元去掉点节$A_i(13\leqslant i\leqslant16)$，在插值多项式 (9) 中去掉四项：$a_{33}\xi^3\eta^3, a_{32}\xi^3\eta^2, a_{23}\xi^2\eta^3, a_{22}\xi^2\eta^2$，则得十二节点单元. 以 $(\xi_i,\eta_i)(1\leqslant i\leqslant12)$表示各节点的坐标，则基函数是

$$\frac{1}{32}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(-10+9\xi^2+9\eta^2),\quad 1\leqslant i\leqslant4,$$

$$\frac{9}{32}(1+\xi\xi_i)(1-\eta^2)(1+9\eta\eta_i),\qquad i=7,8,11,12,$$

$$\frac{9}{32}(1+\eta\eta_i)(1-\xi^2)(1+9\xi\xi_i),\qquad i=5,6,9,10.$$

误差估计仍是(6).

以上为Lagrange型插值，下面是Hermite型插值.

2.6 双三次Hermite型插值

取图23的节点，插值多项式是 (9). 在节点上给定q_3,

$\partial q_3/\partial\xi$，$\partial q_3/\partial\eta$，$\partial^2 q_3/\partial\xi\partial\eta$. 令$\xi_1=\eta_1=-1$，$\xi_2=\eta_2=1$，则基函数是以下两组一维插值多项式的乘积：

$$\frac{1}{4}(\xi^2-1)(\xi+\xi_i),\quad \frac{1}{4}(\xi+\xi_i)^2(2-\xi\xi_i),\quad i=1,2,$$

$$\frac{1}{4}(\eta^2-1)(\eta+\eta_j),\quad \frac{1}{4}(\eta+\eta_j)^2(2-\eta\eta_j),\quad j=1,2,$$

两两相乘以后得16个基函数．误差估计是（6）.

2.7 不完全双三次Hermite型插值

这种单元又称Adini矩形，仍取图23的节点，插值多项式与第2.5段中不完全双三次插值相同．在节点上给定函数值以及两个一阶微商．令$(\xi_i,\eta_i)(1\leqslant i\leqslant 4)$是各节点的坐标，则基函数是

$$\frac{1}{8}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(2+\xi\xi_i+\eta\eta_i-\xi^2-\eta^2),$$

$$-\frac{1}{8}\xi_i(1-\xi^2)(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i),$$

$$-\frac{1}{8}\eta_i(1-\eta^2)(1+\eta\eta_i)(1+\xi\xi_i),\quad 1\leqslant i\leqslant 4.$$

误差估计仍是(6).

2.8 Wilson矩形

以四个顶点为节点．在节点上给定函数值，在每个单元内给定二阶微商$\partial^2 p_2/\partial\xi^2$与$\partial^2 p_2/\partial\eta^2$，插值多项式是(3)．六个系数可以由以上给定的六个常数唯一确定．基函数是

$$\frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i),\quad 1\leqslant i\leqslant 4,$$

$$\frac{1}{2}(\xi^2-1),\qquad \frac{1}{2}(\eta^2-1).$$

误差估计是（4）.

2.9 等参数单元

所有Lagrange型插值的单元都可以用作等参数单元，例如：

（a）四节点双线性等参数单元.

以$\varphi_i(\xi,\eta)(1\leqslant i\leqslant 4)$记第2.1段双线性插值的基函数，则插值公式为

$$x=\sum_{i=1}^{4}x_i\varphi_i(\xi,\eta),$$

$$y=\sum_{i=1}^{4}y_i\varphi_i(\xi,\eta),$$

$$u=\sum_{i=1}^{4}u_i\varphi_i(\xi,\eta),$$

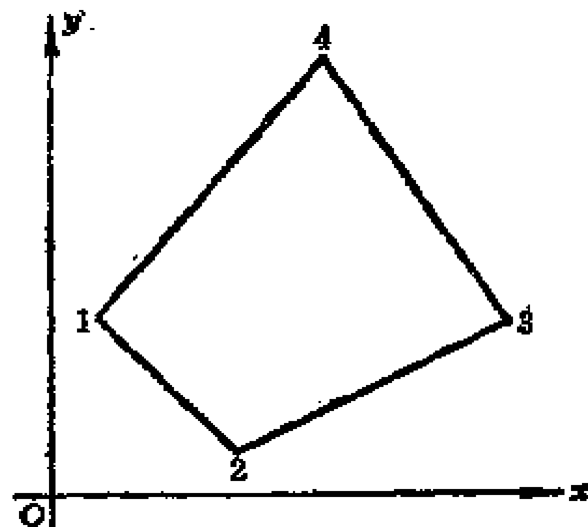


图 26

其中$-1\leqslant\xi,\eta\leqslant 1$. 此时$u(x,y)$以参数形式表出，定义在平面上的一个四边形单元上（图26），(x_i,y_i)是节点在(x,y)平面上的坐标，u_i是节点上的函数值.

（b）八节点不完全双二次等参数单元.

以$\varphi_i(\xi,\eta)(1\leqslant i\leqslant 8)$记第2.3段不完全双二次插值的基函数，则插值公式为

$$x=\sum_{i=1}^{8}x_i\varphi_i(\xi,\eta),$$

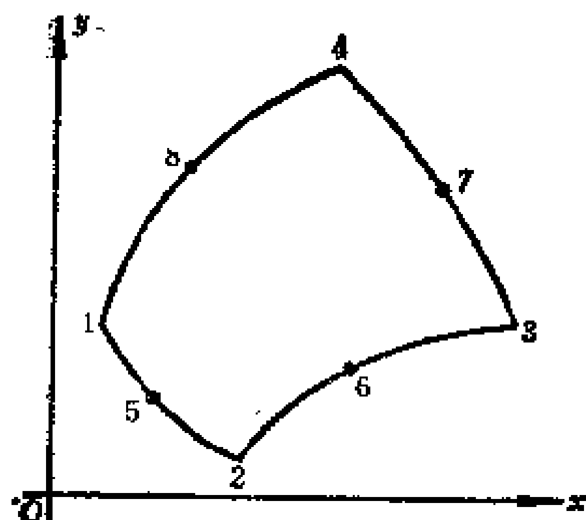


图 27

$$y=\sum_{i=1}^{8} y_i\varphi_i(\xi,\eta),$$

$$u=\sum_{i=1}^{8} u_i\varphi_i(\xi,\eta).$$

其中$-1\leqslant\xi,\eta\leqslant1$. 一般，单元是平面上的一个曲边四边形（图27），在特殊情况下，四边形的边可以是直线.

等参数插值公式较多用于四边形单元，也可以用于三角形单元.

在以上各四边形单元中，第一至第五种以及第九种都属于C^0类单元. 第六种单元不仅可以保证相邻单元的公共边界上插值函数连续，而且还可以保证其一阶微商连续，为C^1类单元. 第七种单元虽然是Hermite型插值，但是一阶微商在单元边界上仍不连续，只是C^0类单元. 第八种单元甚至不能保证函数的连续性. 作为非协调单元，第七种单元对于二次多项式，第八种单元对于一次多项式都通过了分片检验.

§3 三维单元

几乎所有的二维单元都可以推广到三维，例如：

3.1 四面体线性单元

以$(x_i,y_i,z_i)(1\leqslant i\leqslant4)$表示顶点坐标（图28），引进体积坐标为

$$\lambda_1=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}1 & x & y & z\\ 1 & x_2 & y_2 & z_2\\ 1 & x_3 & y_3 & z_3\\ 1 & x_4 & y_4 & z_4\end{vmatrix}, \quad \cdots,$$

$$\lambda_4=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1 & z_1\\ 1 & x_2 & y_2 & z_2\\ 1 & x_3 & y_3 & z_3\\ 1 & x & y & z\end{vmatrix},$$

其中 $$D=\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1 & z_1\\ 1 & x_2 & y_2 & z_2\\ 1 & x_3 & y_3 & z_3\\ 1 & x_4 & y_4 & z_4\end{vmatrix}.$$

$\lambda_i(1\leqslant i\leqslant 4)$就是基函数.

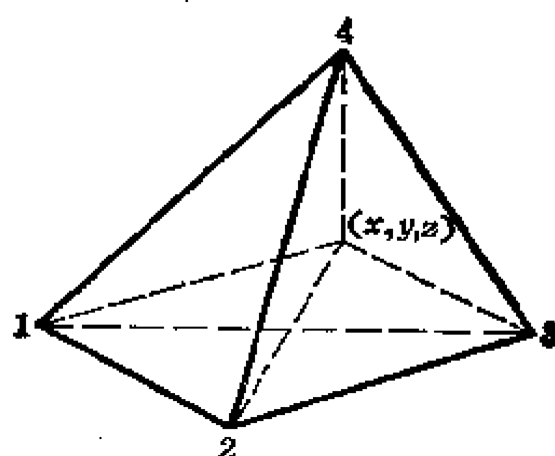


图 28

3.2 八节点等参数单元

设参数为ξ,η,ζ $(-1\leqslant \xi,\eta,\zeta\leqslant 1)$，正六面体的顶点为$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ $(1\leqslant i\leqslant 8)$，则基函数为

$$\varphi_i(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{8}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(1+\zeta\zeta_i), \qquad 1\leqslant i\leqslant 8.$$

插值公式是

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\sum_{i=1}\begin{pmatrix}x_i\\ y_i\\ z_i\end{pmatrix}\varphi_i(\xi,\eta,\zeta),$$

$$u=\sum_{i=1}^{8} u_i\varphi_i(\xi,\eta,\zeta),$$

(x_i,y_i,z_i)是空间六面体单元顶点的坐标，u_i是函数值.

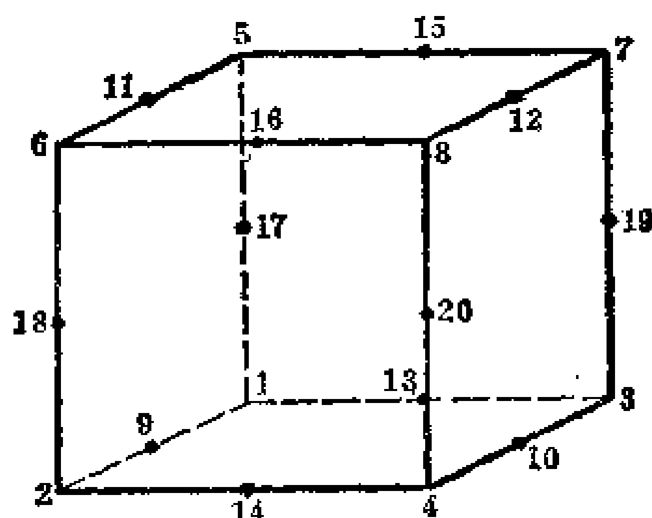


图 29

3.3 二十节点等参数单元

以正六面体$\{(\xi,\eta,\zeta):-1\leqslant\xi,\eta,\zeta\leqslant 1\}$的各顶点与各棱的中点为节点（图29），节点坐标为$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(1\leqslant i\leqslant 20)$. 作不完全双二次Lagrange插值，在插值多项式中不含$\xi^2\eta^2\zeta^2$, $\xi^2\eta^2\zeta$, $\xi^2\eta\zeta^2$, $\xi\eta^2\zeta^2$, $\xi^2\eta^2$, $\xi^2\zeta^2$, $\eta^2\zeta^2$七项. 基函数是

$$\frac{1}{8}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(1+\zeta\zeta_i)(\xi\xi_i+\eta\eta_i+\zeta\zeta_i-2),$$

$$1\leqslant i\leqslant 8,$$

$$\frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta\eta_i)(1+\zeta\zeta_i),\quad 9\leqslant i\leqslant 12,$$

$$\frac{1}{4}(1-\eta^2)(1+\xi\xi_i)(1+\zeta\zeta_i),\quad 13\leqslant i\leqslant 16,$$

$$\frac{1}{4}(1-\zeta^2)(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i), \quad 17\leqslant i\leqslant 20.$$

以φ_i (ξ,η,ζ) 记以上各基函数 $(1\leqslant i\leqslant 20)$，则插值公式是

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{20}\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}\varphi_i(\xi,\eta,\zeta),$$

$$u=\sum_{i=1}^{20}u_i\varphi_i(\xi,\eta,\zeta),$$

(x_i,y_i,z_i)是空间六面体单元相应节点的坐标，u_i是函数值.

附录二　Babuška-Brezzi理论

设X，Y为实Hilbert空间，$b(q,v)$是$X\times Y$上的有界双线性泛函．令

$$V_0=\{q\in X;\ b(q,v)=0,\ \ \forall v\in Y\},$$

记V_0的正交余子空间为$V^{\perp}$．以X'与Y'分别表示X与Y的对偶空间．定义V_0的极集为

$$V^0=\{g\in X';\ g(q)=0,\ \ \forall q\in V_0\}.$$

此外，对于给定的$q\in X$，存在一个唯一的$l\in Y'$，使

$$l(v)=b(q,v),\qquad \forall v\in Y.$$

令$l=Bq$，则$B:X\to Y'$是一个有界线性算子．同理，对于给定的$v\in Y$，存在一个唯一的$g\in X'$，使

$$g(q)=b(q,v),\qquad \forall q\in X.$$

令$g=B'v$，则$B':Y\to X'$是B的对偶算子．

引理1　以下三个性质是等价的：

（a）存在常数$\beta>0$，使

$$\sup_{\substack{q\in X\\ q\neq 0}}\frac{b(q,v)}{\|q\|_X}\geqslant\beta\|v\|_Y,\qquad \forall v\in Y;\tag{1}$$

（b）算子B'是从Y到V^0上的一个同构，并且

$$\|B'v\|_{X'}\geqslant\beta\|v\|_Y,\qquad \forall v\in Y;\tag{2}$$

（c）算子B是从$V^{\perp}$到Y'上的一个同构，并且

$$\|Bq\|_{Y'}\geqslant\beta\|q\|_X,\qquad \forall q\in X.\tag{3}$$

证明　首先证明（a）与（b）的等价性．对于$v\in Y$，令$g=B'v$，则由

$$\|g\|_{X'}=\sup_{\substack{q\in X\\q\neq 0}}\frac{g(q)}{\|q\|_X}=\sup_{\substack{q\in X\\q\neq 0}}\frac{b(q,v)}{\|q\|_X}$$

可知，（1）式与（2）式是等价的．下面只要证明当（1）或（2）成立时，B'是从Y到V^0上的一个同构．设B'的值域为$R(B')$，则由（2）式，B'是从Y到$R(B')$的一个一一对应，B'的逆算子也是连续的，因此B'是同构．我们再证明

$$R(B')=V^0\,. \tag{4}$$

因为B'是同构，所以$R(B')$是X'的闭子空间．由Banach闭值域定理，即得（4）式．

其次证明（b）与（c）的等价性．设从X到$V^{\perp}$的正交投影算子为P．任取$g\in(V^{\perp})'$，可以取一个X'上的元素$\bar{g}$，它的定义是

$$\bar{g}(q)=g(Pq),\quad \forall q\in X.$$

显然，$\bar{g}\in V^0$，而且对应关系$g\to\bar{g}$将$(V^{\perp})'$等距地映射到V^0之上．把$(V^{\perp})'$与V^0等同，就可以发现(b)与(c)是等价的．证完．

下面的引理是第三章定理1的推广．

引理2 如果

（a）$|b(q,v)|\leqslant M\|q\|_X\|v\|_Y$，$\forall q\in X$，$v\in Y$；

$$\tag{5}$$

（b）对任意的$F\in Y'$，问题：求$q_h\in X_h$，使

$$b(q_h,\ v)=F(v),\qquad \forall v\in Y_h, \tag{6}$$

有唯一解，并且

$$\|q_h\|_X\leqslant\gamma\|F\|_{Y'}\,, \tag{7}$$

其中X_h与Y_h分别是X与Y的闭线性子空间，

则存在只依赖于常数M与γ的常数C，使得只要$p\in X$与$p_h\in X_h$满足

$$b(p,\ v)=b(p_h,\ v),\qquad \forall v\in Y_h, \tag{8}$$

就有

$$\|p-p_h\|_X\leqslant C\inf_{q\in X_h}\|p-q\|_X. \tag{9}$$

证明 任取$q\in X_h$，由（8）式得

$$b(q-p_h,\ v)=b(q-p,\ v).$$

令

$$F(v)=b(q-p,\ v),$$

则$F\in Y'$，由（5）式得

$$\|F\|_{Y'}\leqslant M\|q-p\|_X.$$

$q-p_h$是问题（6）的解，由（7）

$$\|q-p_h\|_X\leqslant \gamma M\|q-p\|_X.$$

因此

$$\|q-p_h\|_X\leqslant\|p-q\|_X+\|q-p_h\|_X$$
$$\leqslant(1+\gamma M)\|p-q\|_X.$$

由q的任意性，取右式的下确界，即得（9）式．证完．

定理1 (Babuška) 设

（a） $|b(q,\ v)|\leqslant M\|q\|_X\|v\|_Y$， $\forall q\in X,\ v\in Y$；

（b）存在常数$\beta>0$，使

$$\sup_{\substack{q\in X\\ q\neq 0}}\frac{b(q,\ v)}{\|q\|_X}\geqslant\beta\|v\|_Y,\qquad \forall v\in Y;$$

（c） $\sup\limits_{v\in Y}b(q,\ v)>0$， $\forall q\in X$，$q\neq 0$；

（d） $F\in X'$，

则问题：求$v\in Y$，使

$$b(q,\ v)=F(q),\qquad \forall q\in X,$$

有唯一解，并且

$$\|v\|_Y \leqslant \frac{1}{\beta}\|F\|_{X'}.$$

此外，设

（e）存在常数 $\bar{\beta}>0$，使

$$\sup_{\substack{q\in X_h\\ q\neq 0}} \frac{b(q,\ v)}{\|q\|_X} \geqslant \bar{\beta}\|v\|_Y, \qquad \forall v\in Y_h,$$

其中X_h与Y_h分别是X与Y的闭线性子空间，

（f）$\sup\limits_{v\in Y_h} b(q,\ v)>0$， $\quad \forall q\in X_h,\ q\neq 0$，

则存在只依赖于M与$\bar{\beta}$的常数C，使得只要$v_h\in Y_h$是问题

$$b(q,\ v_h)=F(q), \qquad \forall q\in X_h$$

的解，就有

$$\|v-v_h\|_Y \leqslant C \inf_{w\in Y_h} \|v-w\|_Y.$$

证明 由条件（c）可知$V_0=\{0\}$，因此$V^0=X'$。由引理1与条件(b)，算子B'是从Y到X'的一个同构，并且

$$\|B'v\|_{X'} \geqslant \beta\|v\|_Y, \qquad \forall v\in Y.$$

即对任意的$F\in X'$，$v=(B')^{-1}F$恒存在，并且

$$\|v\|_Y \leqslant \frac{1}{\beta}\|F\|_{X'}.$$

这就证明了定理的第一部分。

根据以上结论，v_h是存在唯一的，并且

$$\|v_h\|_Y \leqslant \frac{1}{\bar{\beta}}\|F\|_{X'}.$$

由引理2

$$\|v-v_h\|_Y \leqslant \left(1+\frac{1}{\beta}M\right) \inf_{w\in Y_h} \|v-w\|_Y.$$

这就证明了定理的第二部分. 证完.

容易看出, 定理1的第一部分是Lax-Milgram定理的一个推广; 第二部分是椭圆型问题有限元解的误差估计的一个推广. 下面我们介绍Brezzi的理论.

设$a(p,q)$是$X\times X$上的有界双线性泛函

$$|a(p,q)| \leqslant M_1\|p\|_X\|q\|_X,$$

$b(q, v)$是$X\times Y$上的有界双线性泛函

$$|b(q,v)| \leqslant M_2\|q\|_X\|v\|_Y,$$

$G\in X'$, $F\in Y'$, 考虑如下问题: 求$p\in X$与$u\in Y$, 使

$$\begin{cases} a(p,q)+b(q,u)=G(q), & \forall q\in X, \\ b(p,v)=F(v), & \forall v\in Y. \end{cases} \tag{10}$$

设X_h与Y_h分别是X与Y的闭线性子空间. 考虑(10)的有限元近似, 即求$p_h\in X_h$, $u_h\in Y_h$, 使

$$\begin{cases} a(p_h,q)+b(q,u_h)=G(q), & \forall q\in X_h, \\ b(p_h,v)=F(v), & \forall v\in Y_h. \end{cases} \tag{11}$$

令
$$V(F)=\left\{q\in X;\ b(q,v)=F(v),\ \ \forall v\in Y\right\},$$

$$V_h(F)=\left\{q\in X_h;\ b(q,v)=F(v),\ \ \forall v\in Y_h\right\},$$

并且记

$$V_0=V(0), \qquad V_{h0}=V_h(0).$$

定理2 (Brezzi) 设

(a) 存在常数$\alpha>0$, 使

$$a(p,\ p)\geqslant\alpha\|p\|_X^2, \qquad \forall p\in V_0;$$

(b) 存在常数$\beta>0$, 使

$$\sup_{\substack{p\in X\\p\neq 0}}\frac{b(p,\ v)}{\|p\|_X}\geqslant\beta\|v\|_Y,\qquad \forall v\in Y,$$

则问题（10）有唯一解p，u，满足

$$\|p\|_X+\|u\|_Y\leqslant C(\|G\|_{X'}+\|F\|_{Y'}),$$

其中C只依赖于α，β和M_1.

此外，设

（c）存在常数$\tilde{\alpha}>0$，使

$$a(p,\ p)\geqslant\tilde{\alpha}\|p\|_X^2,\quad \forall p\in V_{h0},$$

（d）存在常数$\tilde{\beta}>0$，使

$$\sup_{\substack{p\in X_h\\p\neq 0}}\frac{b(p,\ v)}{\|p\|_X}\geqslant\tilde{\beta}\|v\|_Y,\quad \forall v\in Y_h,$$

则问题（11）的解满足如下的误差估计：

$$\|p-p_h\|_X+\|u-u_h\|_Y$$
$$\leqslant C\left\{\inf_{q\in X_h}\|p-q\|_X+\inf_{v\in Y_h}\|u-v\|_Y\right\},$$

其中C只依赖于$\tilde{\alpha}$，$\tilde{\beta}$和M_1，M_2.

证明　如果p,u满足(10)，则$p\in V(F)$，并且

$$a(p,q)=G(q),\qquad \forall q\in V_0. \tag{12}$$

由条件(b)和引理1，$V(F)$是非空的．由条件(a)和Lax-Milgram定理，问题（12）有唯一解$p\in V(F)$，并且

$$\|p\|_X\leqslant C\{\|F\|_{Y'}+\|G\|_{X'}\}, \tag{13}$$

其中C只依赖于β，α与M_1.

考虑如下问题：求$u\in Y$，使

$$b(q,u)=G(q)-a(p,q),\qquad \forall q\in X. \tag{14}$$

令
$$g(q)=G(q)-a(p,q),$$

则由（12）容易看出$g\in V^0$，由引理1，问题（14）存在唯

一的解$u\in Y$. 并且

$$\|u\|_Y\leqslant\frac{1}{\beta}\|g\|_{X'}\leqslant\frac{1}{\beta}\{\|G\|_{X'}+M_1\|p\|_X\}.$$

以（13）式代入即得$\|u\|_Y$的估计. 我们得到的p, u就是(10)的解.

其次, 令

$\bar{b}((p,u),(q,v))=a(p,q)+b(q,u)+b(p,v)$, 它是一个定义在$(X\times Y)\times(X\times Y)$上的有界双线性泛函. 问题（10）等价于：求$(p,u)\in X\times Y$, 使

$$\bar{b}((p,u),(q,v))=G(q)+F(v),$$
$$\forall(q,v)\in X\times Y.$$

问题（11）等价于：求$(p_h,u_h)\in X_h\times Y_h$, 使

$$\bar{b}((p_h,u_h),(q,v))=G(q)+F(v),$$
$$\forall(q,v)\in X_h\times Y_h.$$

它们的解都是存在唯一的. 由引理 2 就证明了定理的第二部分. 证完.

由以上两个定理可以看出, 条件（1）对于不满足强制性条件（第一章条件(16)）的变分问题具有基本的重要性, 它一般称为Babuška-Brezzi条件.

习题答案及提示

第一章

1. 在区域$\Omega_\varepsilon=\left\{(x,\ y)\ ;\ \varepsilon<r<\frac{1}{2}\right\}$上用Green公式.
   令$\varepsilon\to+0$，可以证明古典微商是Ω上的广义微商.
2. 当$u\in H^1(\Omega)$，在广义微商定义中允许我们用φv代替φ.
3. 对于$C^\infty(\bar{\Omega})$中的函数，Green公式成立，利用定理1与定理4.
4. 分别在区域Ω_1与Ω_2上用Green公式.
5. 求$u\in H^1(\Omega)$，使

$$\int_\Omega\sum_{i=1}^n\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx+\int_{\partial\Omega}buvds$$

$$=\int_\Omega fvdx+\int_{\partial\Omega}gvds,$$

$$\forall v\in H^1(\Omega).$$

   可以证明当$u\in H^1(a,\ b)$，

$$\int_a^b u^2(x)dx$$

$$\leqslant 2(b-a)(u^2(a)+(b-a)\int_a^b(u'(x))^2dx).$$

第二章

1. 不妨设矩形为$\{(x,\ y):\ 0<x<a,\ 0<y<b\}$，则$u$可

以唯一确定为

$$u=u_1\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)+u_2\frac{x}{a}\left(1-\frac{y}{b}\right)$$

$$+u_3\frac{xy}{ab}+u_4\left(1-\frac{x}{a}\right)\frac{y}{b},$$

u_i为节点值.

2. 单元刚度矩阵是对称的:

$$\frac{b}{3a}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/2 & 1/2 \\ & 1 & 1/2 & -1/2 \\ \bullet & & 1 & -1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$+\frac{a}{3b}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 & -1 \\ & 1 & -1 & -1/2 \\ \bullet & & 1 & 1/2 \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

5. 第一种剖分:

位移(10^{-4}cm)

	1	2	3	4	5	6
u	5.06	4.89	4.74	2.57	2.37	2.28
v	−0.303	−0.383	0.0469	−0.532	−0.119	0.266

应力(kg/cm^2)

	1	2	3	4	5
σ_x	99.5	100.7	100.4	99.3	103.1
σ_y	−0.169	0.685	−0.546	2.12	1.35
τ_{xy}	0.270	1.01	−0.424	−0.937	−3.17

	6	7	8
σ_x	102.9	95.1	98.8
σ_y	28.8	0.959	27.7
τ_{xy}	—1.86	0.633	4.16

第二种剖分

位移(10^{-4}cm)

	1	2	3	4
u	4.75	4.89	5.05	2.28
v	—0.0705	0.359	0.780	—0.278

	5	6
u	2.37	2.56
v	0.107	0.519

应力(kg/cm^2)

	1	2	3	4
σ_x	99.3	100.4	100.8	99.5
σ_y	2.14	—0.544	0.729	—0.167
τ_{xy}	0.881	0.399	—1.07	—0.292

	5	6	7	8
σ_x	99.0	95.1	102.9	102.9
σ_y	27.7	0.967	28.8	1.34
τ_{xy}	—4.34	—0.682	1.68	3.11

第 三 章

1. 在定理 1 中$M=\alpha=1$.

3. (a) 证明当节点值为零时，插值函数恒等于零.

   (b)用带积分型余项的Taylor公式分别展开节点值与法向微商值，积分号下均取到u的三阶微商.

4. 取$v\in C_0^\infty(\Omega)$，使$\|u-v\|_1<\varepsilon$，用定理1。

6. (c)考虑辅助问题

$$\begin{cases}\dfrac{d^4w}{dx^4}=u''-u_h'',\\ w(0)=w'(0)=w(1)=w'(1)=0.\end{cases}$$

第 四 章

2. (b)
$$\begin{aligned}J(\varepsilon,u)=&\frac{1}{2}\int_\Omega(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\tau_{xy}\gamma_{xy})dxdy\\&+\int_\Omega\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+f_x\right)udxdy\\&+\int_\Omega\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+f_y\right)vdxdy\\&-\int_{\Gamma_1}\{u_0(\sigma_x\cos(\nu,x)+\tau_{xy}\cos(\nu,y))\\&+v_0(\tau_{xy}\cos(\nu,x)+\sigma_y\cos(\nu,y))\}ds.\end{aligned}$$

3. 证明齐次方程只有零解.

4.
$$\begin{aligned}b(q,u)&=-\int_\Omega\sum_{i=1}^n q_i\frac{\partial u}{\partial x_i}dx\\&=-\sum_{e=1}^M\int_{\Omega_e}\sum_{i=1}^n\left(q_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+\frac{\partial q_i}{\partial x_i}u\right)dx\\&=-\sum_{e=1}^M\int_{\partial\Omega_e}\sum_{i=1}^n q_iu\cos(\nu,x_i)ds.\end{aligned}$$

5. 在每条边I_j上取$\lambda\in P_1(I_j)$.

6. 第一种基函数满足

$$\varphi_i(A_j)=\begin{cases}1, & j=i,\\ 0, & j\neq i,\end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2}=0, \quad (x,y)\in \Omega_e,$$

它是连续的。于是$\varphi_i \in H_0^1(\Omega)$.

第二种基函数满足$\varphi_i(A_j)=0$，仅在一个单元上$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2}\left(\text{或}\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2}\right)$等于1，其余$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2}$均为零.这时$a'(u,\varphi_i)$仅是在一个单元上的积分.

7. 当u_h是协调有限元格式的解．令$p_1=\partial u_h/\partial x$，$p_2=\partial u_h/\partial y$，可以直接验证$p_1, p_2$，$u_h$是杂交有限元格式的解．反之，设$p_1, p_2, u_h$是杂交有限元格式的解，将$u_h$在单元上开拓为双线性函数，则可证$p_1=\partial u_h/\partial x$，$p_2=\partial u_h/\partial y$，并且$u_h$是协调有限元格式的解.

8. $V_h=\{u\in C([0,1]);\ u|_{\Omega_i}\in P_1(\Omega_i),\ u(0)=u(1)=0\}$.

$$\|p-p_h\|_1+\|u-u_h\|_1\leqslant Ch(|p|_2+|u|_2).$$

第 五 章

1. 以面积坐标作为积分变量，可以计算得

$$\frac{|D|}{24}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. 设$u\in P_1(\Omega_e)$，则

$$\int_{\Omega_e}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy=0,\ \forall v\in p_1(\Omega_e)$$

的充分必要条件是$u=$常数.

3. $\lambda=8/|D|$，特征函数就是对应于中间节点的基函数.

4. 由$R(u)\geqslant\lambda_1$得

$$a(u,u)-\lambda(u,u)\geqslant\frac{\lambda_1-\lambda}{1+\lambda_1}\|u\|_1^2.$$

6. 取$\{u_j^{(k)}\}\subset C_0^\infty(\Omega)$ 逼近u_j，可证在集合$B=\{u\in E_j;\ \|u\|_0=1\}$上$u$可以由$V_h$中的函数一致逼近.

第 六 章

1. 求 $u_{hk}^{(m)}\in V_h$，使

$$\begin{cases}\dfrac{1}{k}(u_{hk}^{(m)}-u_{hk}^{(m-1)},\ v)+a(u_{hk}^{(m)},v)\\ =(f^{(m)},v),\qquad \forall v\in V_h,\\ u_{hk}^{(0)}=g_I.\end{cases}$$

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{\rho^{(m)}-\rho^{(m-1)}}{k}\right\|_{0,\Omega}\\ &=\left\|\frac{u^{(m)}-u^{(m-1)}}{k}-P\,\frac{u^{(m)}-u^{(m-1)}}{k}\right\|_{0,\Omega}\\ &\leqslant Ch^2\left\|\frac{u^{(m)}-u^{(m-1)}}{k}\right\|_{2,\Omega}\\ &=Ch^2\left\|\frac{1}{k}\int_{(m-1)k}^{mk}\partial_\tau u\,d\tau\right\|_{2,\Omega}\\ &\leqslant Ch^2\,\frac{1}{k}\int_{(m-1)k}^{mk}\left\|\partial_\tau u\right\|_{2,\Omega}d\tau.\end{aligned}$$

2. $$u=\left(\frac{1}{\sqrt{12}}u_1\left(\frac{1}{2}\right)\sin\sqrt{12}t+u_0\left(\frac{1}{2}\right)\cos\sqrt{12}t\right)\varphi(x),$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2},\\ 2(1-x), & \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1.\end{cases}$$

参考书目

[1] Aziz, A. K., The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations, Academic Press, New York and London, 1972.

[2] 复旦大学数学系，有限元素法选讲，1977，李大潜等，有限元素法续讲，科学出版社，1979.

[3] 冯康等，数值计算方法，国防工业出版社，1978.

[4] Ciarlet, P. G., The Finite Element Method for Elliptic Problems, North-Holland, 1978.

[5] 姜礼尚，庞之垣，有限元方法及其理论基础，人民教育出版社，1979.

[6] 斯特朗，G.，费克斯，G. J.，崔俊芝等译，有限元方法分析，科学出版社，1979.

[7] 董平，罗赛托斯，J. N.，张圣坤等译，有限单元法——基本方法与实施，国防工业出版社，1979.

[8] 钱伟长，变分法及有限元，科学出版社，1980.

[9] 鹫津久一郎，老亮等译，弹性和塑性力学中的变分法，科学出版社，1980.

[10] 李荣华，冯果忱，微分方程数值解法，人民教育出版社，1980.

[11] Adams, R. A., 叶其孝等译，索伯列夫空间，人

民教育出版社，1981.

[12] 冯康，石钟慈，弹性结构的数学理论，科学出版社，1981.

[13] 陈传淼，有限元方法及其提高精度的分析，湖南科学技术出版社，1982.

[14] 李开泰等，有限元方法及其应用，西安交通大学出版社，1984.

民教育出版社，1981.
[12] 冯康，石钟慈，弹性结构的数学理论，科学出版社，1981.
[13] 陈传淼，有限元方法及其提高精度的分析，湖南科学技术出版社，1982.
[14] 李开泰等，有限元方法及其应用，西安交通大学出版社，1984.